Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 7.1.2005

Mathematik I

Serie 11[1]

Abgabetermin: Montag, 17.1.05, 8^{15} Uhr.

1. (a) Bestimme Radius $r =| z |$ und Argument $\varphi = \arg(z)$ der komplexen Zahlen $z = z - i,\ z = 17 + 4i,\ z = -5i$.

   (b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 1$.

2. Zeige für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{und} \quad \overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}.$$

3. Betrachte die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z + 1\ ,\ g(z) = z^2 + z\ ,\ h(z) = z^2 + z + 1$, und bestimme das Bild $f(S^1),\ g(S^1),\ h(S^1)$ des Einheitskreises $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

4. Es sei $r \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{r} \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 = r$. Dann bezeichne $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ die Menge aller Zahlen der Form $z = a + b\sqrt{r}\ ,\ a, b \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ ein Körper ist. (Spezialfälle: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/