Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 13.10.2004

Mathematik I

Serie 1[1]

Abgabetermin: Montag, 25.10.04, 8^{15} Uhr.

Im Folgenden bezeichnen A, B, C beliebige Mengen.

1. Zeige:
   (a) $A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A$
   (b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Es sei $A * B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   (a) Zeige:
      i. $A * B = B * A$
      ii. $A * (B * C) = (A * B) * C$
      iii. $A * \emptyset = A$
      iv. $A * A = \emptyset$
   (b) Zeige mit Hilfe von i - iv, dass es genau eine Menge X gibt, für die gilt $A * X = B$.

3. Zeige mit Induktion nach n, dass die Menge $\Omega_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ genau 2^n Teilmengen hat.
   (**Hint.** $\Omega_n = \Omega_{n-1} \cup \{n\}$. Für jede Teilmenge $T \subseteq \Omega_n$ gilt entweder $T \subseteq \Omega_{n-1}$ oder $T = S \cup \{n\}$ mit $S \subseteq \Omega_{n-1}$).

4. (a) Diskutiere den Unterschied zwischen A und $\{A\}$. (Insbesondere $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$).
   (b) Definiere eine (aufsteigende) Folge von Mengen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \ldots;\quad A_\infty := \bigcup_{n-1}^{\infty} A_n$, durch $A_0 := \emptyset$ und $A_n = A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\}\quad (n = 1, 2, \ldots)$. Finde eine Bijektion $f : A_\infty \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/