Prof. Dr. R. Bieri WS 2004/2005

Frankfurt/M., den 17.12.2004

Mathematik I (Zahlbereiche)
Klausur-Trainingsaufgaben[1]

1. Wir schreiben $\mathcal{P}^e(\mathbb{N})$ als die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und betrachten die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{N} \to \mathcal{P}^e(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} f_1(m) &:= T_m \quad \text{(Menge der Teiler von } m) \\ f_2(m) &:= \{1, 2, \ldots, m\} \\ f_3(m) &:= \text{Menge Zahlen } \alpha_i \in \mathbb{N}, \text{die als Exponenten} \\ & \text{ in der Primfaktorzerlegung von } m \text{ vorkommen.} \end{aligned}$$

   Welche dieser Abbildungen sind injektiv, welche sind surjektiv?

2. Zeige: $\sqrt[3]{2} + 1$ ist nicht rational.

3. (a) Bestimme die Primfaktorzerlegung von $\frac{1001}{10!}$.
   (b) Bestimme den Exponenten α_5 und α_7 in der Primfaktorzerlegung von (100!).

4. Zeige: Für jede natürliche Zahl $m > 2$ ist die Euler-Zahl $\varphi(m)$ gerade.

5. Bestimme alle $x, y, \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(x, y) = 6$ und $\mathrm{kgV}(x, y) = 120$.

6. Zeichne die Teilerdiagramme von $1001, 14641$ und 392.

7. Bestimme die Lösungsmengen $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (a) $6x + 21y = 280$
   (b) $5x - 22y = 280$

8. Bestimme die zu $[7] \in \mathbb{Z}_{26}$ multiplikativ inverse Restklasse (oder begründe, warum es die nicht gibt).

9. Merkwürdigerweise gilt $12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$, $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$ und $46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$. Gibt es weitere Beispiele?

10. Bestimme die Lösungen $L \subseteq \mathbb{Z} \wedge \mathbb{Z}$ für die simultanen Kongruenzen $5x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7) \wedge 2x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 9)$.

[1] *auch als pdf-Datei im Internet unter:* http://www.math.uni-frankfurt.de/~bieri/