

Elementarmathematik II

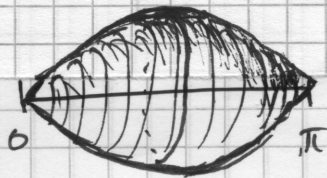
Probeklausur

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ positiv?
2. Wir definieren die Folgen ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n := 1 + 10^{-1}$$

$$b_n := 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n}$$

$$c_n := 1 + 10^{-1} + 10^{-4} + 10^{-9} + \dots + 10^{-n^2}$$
 Welche der drei Folgen sind konvergent?
3. Sind die Grenzwerte der Folgen von Aufgabe 2 – soweit sie konvergieren – rational oder irrational?
4. Für welche der 6 möglichen bijektiven Zuordnungen $\{a, b, c\} \rightarrow \{z, e, i\}$ definiert der Ausdruck $z := (a^b)^{\frac{1}{c}}$ eine wohldefinierte komplexe Zahl $z = x + iy$? Bestimme diese Zahlen $z \in \mathbb{C}$.
5. Bestimme die Ableitung von $f(x) = \log_a(x)$,
 $g(x) = e^{ax+b}$, $h(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$.
6. Ein Zylinder soll bei fest vorgegebener Oberfläche (= Grundfläche + Deckfläche + Mantel) maximales Volumen haben. Bestimme das Verhältnis Höhe : Durchmesser.
7. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph von $\sin: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ um die x-Achse rotiert.



8. Gegeben sei eine komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}$ vom Betrag $|u|=1$. Wir betrachten die zwei Abbildungen der komplexen Zahlenebene $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) := u(z-1) \quad , \quad g(z) := uz - 1.$$

Gesucht ist eine geometrische Beschreibung der beiden Abbildungen.

9. In der Koordinatenebene \mathbb{R}^2 betrachte man die beiden Abbildungen $\sigma, \tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\sigma :=$ Spiegelung an der x -Achse
 $\tau :=$ " " an der Geraden $y = x + 1$

Es sei $\alpha = \tau \circ \sigma$ die Verkettung "erst σ , dann τ ".

- bestimme das Bild $\alpha(P)$ von $P(1,1)$
- Bestimme die Fixpunkte von α
- Beschreibe α in Worten.

10. Diskutiere die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-ax}$,
 a eine positive reelle Zahl. (Maxima, Minima, Nullstellen, Wendepunkte, Skizze)

Jede der Aufgaben wird mit 4 Punkten bewertet (+ ein Zusatzpunkt für schöne und übersichtliche Darstellung).

Mit 18 Punkten ist die Klausur bestanden. Es stehen 2 Stunden zur Verfügung. Erlaubt: Taschenrechner, 4 Seiten (2 Blätter) in eigener Handschrift zusammengestellte Formel- und Faktensammlung - keine Kopie!