BIERI SS 08

Elementarmathematik II

Serie 3

1. Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heisst links-halbstetig im Punkt $x_0\in\mathbb{R}$, wenn für jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n)\to f(x_0)$. (Analog: "rechts-halbstetig).
Man zeige: f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow f$ ist links + rechts halbstetig in x_0

2. Jede rationale Zahl $q\neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $q=\frac{m}{n}$, mit $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, (m,n) teilerfremd. Wir setzen $f(q):=\frac{1}{n}$ und erweitern dies zu einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mit $f(0):=1$ und $f(\text{irrational}):=0$. Man untersuche, in welchen Punkten $x_0\in\mathbb{R}$ die Funktion $f(x)$ stetig ist.

3. Die Funktion $f:[0,1]\to[0,1]$ sei gegeben als

$$(*)\qquad f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\leq x\leq \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}+x, & \frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{2}, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

a) Zeichne den Graph von f, und begründe, dass es zu f eine Umkehrabbildung f^{-1} gibt.
b) Beschreibe f^{-1} sowohl durch den Graph als auch explizit wie $(*)$

4. a) Die Funktion $f(x):=2^{\frac{1}{x}}$ ist zunächst auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert. Skizziere ihren Graph und zeige, dass man f zu einer halbstetigen Funktion $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fortsetzen kann.
b) Gleiche Frage für $g(x):=\dfrac{2^x+1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$