BERI SS 08

Elementarmathematik II

Serie 1.

1. Bernoulli-Ungleichung.

a) Man beweise mit vollst. Induktion, dass für alle $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx$; wobei für $n \geq 2$ sogar ">" geschrieben werden kann.

b) Man interpretiere die Bernoulli-Ungleichung durch Betrachtung des Graphs der Funktion $f(x) = (1+x)^n$ und seiner Tangente im Punkt $(0, f(0))$. (Zeichnung für $n = 2, 3$)

2. Zeige, dass die Folge $a_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ konvergiert und dass ihr Grenzwert eine obere Schranke für

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist. (Hint: $\frac{1}{n!}$ durch $\frac{1}{2^n}$ abschätzen)

3. Für die in Aufgabe 2 definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

und schliesse daraus – mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung – dass (b_n) monoton wächst (und daher wg. 2 konvergiert).

4. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, und verwende das Resultat, um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Abgabe Mo 7. 4. 8:15