

## Serie 9

1. Es sei  $\frac{a}{b}$  ein gekürzter Bruch (incl.  $\frac{0}{1}$ )  
 Mit  $K(\frac{a}{b})$  meinen wir den Kreis mit Mittelpunkt  
 $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$  und Radius  $\frac{1}{2b^2}$ .

a) Zeichne die Kreise  $K(\frac{a}{b})$  für  $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ .

b) Diskutiere, für welche Brüche  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  sich die Kreise  $K(\frac{a}{b}), K(\frac{c}{d})$  schneiden, berühren od. meiden.

2. a) Im Körper  $\mathbb{Z}'_{13}$  bestimme man die mult. Inversen von  $[5], [7]$  und  $[11]$ .

b) Zeige, dass  $\mathbb{Z}_m$  kein Körper ist, wenn  $m \in \mathbb{N}$  keine Primzahl ist.

3. (a) 17 Piraten haben eine Truhe erbeutet, die allerdings zu ihrer grossen Enttäuschung nur eine Mütze voll Goldstücke enthält. Beim Versuch, gleichmäßig zu teilen, bleiben 7 Goldstücke übrig. Um diese entbrennt ein heftiger Streit, bei dem einer der Piraten umkommt. Die verbliebenen 16 versuchen erneut zu teilen, und diesmal bleiben 11 Münzen übrig. Bei einer neuen Auseinandersetzung geht wieder einer der Streitenden über Bord — aber nun gelingt die gerechte Teilung. Wieviele Goldstücke waren in der Truhe?

(b) Ersetze in Teil (a) „allerdings zu ihrer grossen Enttäuschung nur eine Mütze voll“ durch „zu ihrer grossen Freude mehrere Tausend“.

4. a) Zeige mit Induktion nach  $n$   $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) Zeige, dass die Folgen

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{und} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

konvergieren.