Elementarmathematik I

Serie 8

1. Auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sei $(a,b)\sim(c,d)$ definiert durch die Bedingung $ad=bc$. Ist das eine Äquivalenzrelation?

2. a) Hat $X^2-2X-6=0$ in $\mathbb{Q}$ oder im Restklassenring $\mathbb{Z}_7$ eine Lösung?
b) Es sei $d=ggT(a,b)$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0\neq b$.
Zeige: Wenn $X^2+aX+b=0$ in $\mathbb{Q}$ eine Lösung hat, dann ist ist diese sogar in $\mathbb{Z}$, und jeder Primteiler von d teilt b zweimal.

3. In der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ betrachte man die Punkte $\mathbb{Z}^2\subseteq\mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Koordinaten (m,n)
a) Suche eine geometrische Interpretation für $ggT(m,n)$.
b) In welchem Bereich liegen die Paare (m,n) mit $\left|\frac{7}{3}-\frac{m}{n}\right|\leq 2$?

4. Es sei $\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $A(0,0)$, $B(0,m)$, $C(n,0)$, $m,n\in\mathbb{N}$. $\partial\Delta$ bezeichne den Rand und $\mathring{\Delta}$ die inneren Punkte von Δ.
a) Bestimme $i_\Delta := |\mathring{\Delta}\cap\mathbb{Z}^2|$ und $r_\Delta := |\partial\Delta\cap\mathbb{Z}^2|$
b) Zeige, dass die Fläche $F(\Delta)$ als
$$F(\Delta) = i_\Delta + \tfrac{1}{2}r_\Delta - 1 \qquad (*)$$
berechnet werden kann.
c) FREIWILLIG ALS HERAUSFORDERUNG: Zeige, dass die Formel $(*)$ für beliebige durch einen Polygonzug begrenzte Flächen gilt.