Elementermathematik I

Serie 6

1. Es sei M eine Menge und R die Menge aller Teilmengen von M, aufgefasst als kommutativer Ring mit 1 bez Summe $a+b := a \cup b \setminus a \cap b$ und Produkt $ab := a \cap b$.

a) Prüfe, ob in R das "duale Distributivgesetz"
$$a + bc = (a+b)(a+c) \quad , a, b, c \in R$$
gilt.

b) Diskutiere in R die Sinnhaftigkeit von "Teilbarkeit" ($a|b :\Leftrightarrow \exists x$ mit $ax = b$) und "Division mit Rest" (gibt es zu $a, m \in R$ Elemente $b, r \in R$ mit $a = mb + r$? suche (erfüllbare) Bedingungen für r und b, die bewirken, dass r, b eindeutig bestimmt sind.

2. Suche Exponenten m sodass für alle Zahlen $a \in \mathbb{N}$ der Rest von a^m mod 7 gleich 0 oder 1 ist.

3. Bestimme den Rest mod 7 von 10^{10}, $10^{(10^n)}$ und $\sum_{n=1}^{10} 10^{(10^n)}$.

4. Bestimme alle Quadratzahlen $n = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) deren Dezimaldarstellung die Form $aabb$ ($a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) hat.