

Serie 4

1. Zeige (unter Verwendung der Gesetze für +, den Peano Axiomen und der Definition von $m < n$), dass für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathbb{N} \mid x < k\} \cup \{k\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid k < x\}$ eine disjunkte Zerlegung von ganz \mathbb{N} ist.

2. Beweise das Distributivgesetz von \mathbb{Z} mit der Konstruktion von \mathbb{Z} als $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ (natürlich darf das Distributivgesetz von \mathbb{N} verwendet werden)

3. Man beweise (unter ausschliesslicher Verwendung der Axiome) dass in jedem kommutativen Ring R mit 1 für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$(a - b)c = ac - bc$$

4. Man finde einen algebraischen und einen geometrischen Beweis für die Aussage: "Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl"

[Hint : $\bullet + \begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix} + \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix} + \dots]$