BIERI

WS07/08

Elementarmathematik I

Serie 3

1. Es sei $X \subseteq \mathbb{E}^2$ die Vereinigung von m Geraden der Ebene $\mathbb{E}^2$. Wir definieren auf dem Komplement $C = \mathbb{E}^2 - X$ die Relation $P \sim Q \Leftrightarrow: \overline{PQ} \cap X = \emptyset$.
   a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist;
   b) Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen als Funktion von m.

2. Es seien X, Y nicht-leere endliche Mengen mit $|X| = m$, $|Y| = n$.
   a) wieviele Abbildungen $f: X \to Y$ gibt es?
   b) " injektive " $g: X \rightarrowtail Y$ " " ?
   c) Die Zahl der surjektiven Abbildungen $h: X \to Y$ ist subtiler. Bestimme sie für $n = 2$ und $n = 3$

3. Mit den Peano-Axiomen zeige man, dass in $\mathbb{N}$ gilt:
   a) $m + N(n) = N(m) + n$
   b) $m + n = n + m$
   c) $(n + m = n' + m) \Rightarrow (n = n')$

   [Die bereits bewiesene Gleichung $n + 1 = 1 + n$ verwenden!]

4. Unter Verwendung von $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ zeige man zunächst
   a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$

   und anschliessend damit mit Induktion nach n
   b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$