

Elementarmathematik I

Serie 12

1. Führe die "Division mit Rest", $(x^m - 1) : (x^n - 1)$, durch und diskutiere, wann der Rest = 0 ist.

2. Bestimme den g.g.T der beiden Polynome $x^m - 1, x^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

3. Die Funktion $F: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $F(x) = 2^x$. a) Bestimme das Polynom 4. Grades $f(x)$, das an den Stellen $x = -2, -1, 0, 1, 2$ denselben Wert wie $F(x)$ annimmt. b) Vergleiche den Wert der bestimmten Integrale $\int_{-2}^2 F(x) dx, \int_{-2}^2 f(x) dx$.

4. Nun approximiere man die Funktion F von Aufgabe 3 mit zwei Polynomfunktionen vom Grad 3 $f: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ und zwar so, dass

- f an den Stellen $x = -2, -1, 0$ mit F übereinstimmt.
- g an den Stellen $x = 0, 1, 2$ mit F übereinstimmt
- f und g an der Stelle 0 dieselbe erste und zweite Ableitung haben: $f'(0) = g'(0)$ und $f''(0) = g''(0)$.

("spline" Approximation). Bestimme $f(x)$ und $g(x)$ und berechne $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx$.