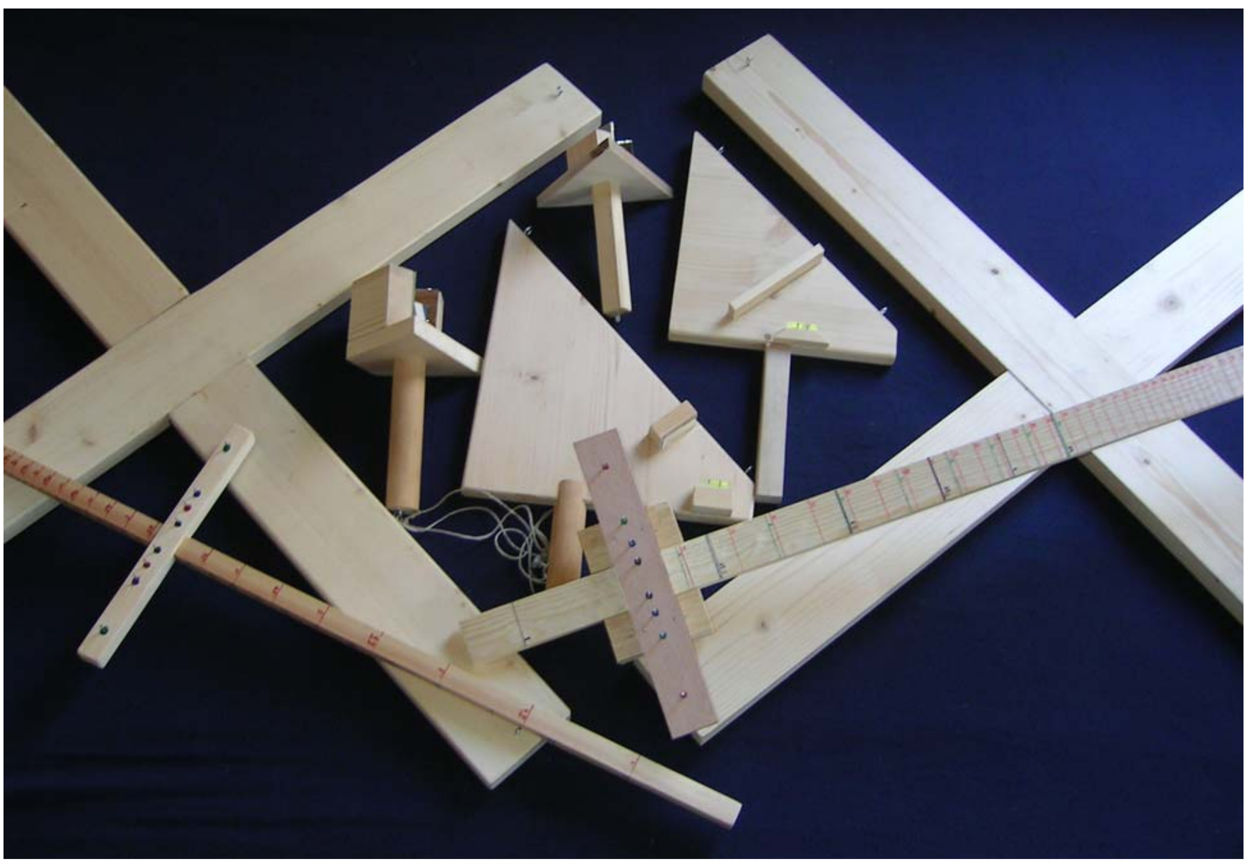
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE WEINGARTEN
University of Education
Prof. Dr. Matthias Ludwig
Fakultät III Fachbereich Mathematik

Skript

zum fachdidaktischen Hauptseminar

Vermessen in der Geometrie



SS2004

erstellt von Gabriele Rettenmaier

Inhaltsangabe S. 1

Vermessen in der Geometrie

Das Wort „Geometrie“ stammt ursprünglich von den Griechen und setzt sich aus den beiden griechischen Wörtern *„geos“* — die Erde, das Land und *„metrein“* — messen, vermessen zusammen. Die Geometrie beschäftigt sich also mit der Wissenschaft der Erdvermessung bzw. Landvermessung.

Schon im 2. Jahrtausend v. Chr. beschäftigten sich die Babylonier und Ägypter mit der praktischen Geometrie und benutzten schon damals z.B. den pythagoreischen Lehrsatz, eine Näherungsformel für die Berechnung der Kreisfläche oder berechneten das Volumen von Pyramidenstümpfen. Hierbei ging es meist um die Lösung von Problemen des alltäglichen Lebens mit Hilfe der Mathematik. Es wurde mit konkreten Zahlen operiert und man strebte nicht nach allgemeingültigen Aussagen. Sätze, Beweise und Definitionen kannte man zu dieser Zeit noch nicht.

Erst im 6. und 7. Jahrhundert waren es die Griechen, die die Gesetzmäßigkeiten zu beweisen versuchten. Erstmals stand die geometrische Anschauung im Vordergrund des Denkens und es entstanden erste Verbindungen zwischen Zahlen und geometrischen Figuren. Im 4. und 5. Jahrhundert v. Chr. entstand in Griechenland die Denkweise, die wir heute noch als Grundzüge wissenschaftlicher Arbeitsweise ansehen — die Geometrie wurde zur Wissenschaft.

Sie wurde für so wichtig gehalten, dass über der platonischen Akademie in Athen wohl der Spruch gestanden hat: „Wer keine Geometrie kann, darf nicht eintreten.“

Damals wurde als eine wichtige Errungenschaft der Geometrie hervorgehoben, dass sie *„allerhand Instrumente und Werkzeuge zu erfinden lehret‘,* die sich auch in vielen anderen Bereichen als sehr nützlich erwiesen.

1. Begründungen für die Geometrie im Gelände

1.1 Nach Vollath

Warum Geometrie im Gelände?

- Der Ursprung der Geometrie liegt im Gelände

Die Landvermessung der alten Ägypter wird als Ausgangspunkt der heutigen Geometriegesehen. Bei passenden Gelegenheiten (z.B. beim Strahlensatz) soll Geometrie im Gelände betrieben werden, um den Schülern Anwendungsmöglichkeiten der Schulgeometrie zu verdeutlichen oder einen Einblick in die Ursprünge zu ermöglichen.

- Lernen an der Wirklichkeit

Die Geometrie bietet sich als Verwirklichungsfeld an, denn die Wirklichkeit von Größen (Ar, Hektar Quadratkilometer) oder von Höhen und Breiten können die Schüler nur außerhalb des Klassenzimmers erfahren.

- „All learning must be motivated“

Geometrie bietet eine Abwechslung im Unterrichtsalltag durch eine nichtalltägliche Art, Geometrieunterricht zu gestalten. Dies schafft Motivation und Arbeitsbereitschaft.

- Förderung der Fähigkeit zu fairer und wirkungsvoller Zusammenarbeit mit Gleichaltrigen, um geometrische Aufgaben und Probleme zu lösen

Die Schüler müssen zusammenarbeiten. Um zu einem exakten Vermessungsergebnis zu kommen ist gewissenhafte Arbeit der Schüler nötig. (erzieherisches Argument)

1.2 Nach Wagenschein

In einem Aufsatz „Mathematik aus der Erde“ (1961) zeigt Martin Wagenschein am Beispiel der Bestimmung des Erdumfangs nach *Eratosthenes* wie diese „Wurzeln der Geometrie“ in den Unterricht eingebaut werden können.[1]

Wagenschein beschreibt vier Elemente in seiner Arbeit:

- <u>Mathematik sollte möglichst aus Umweltsituationen erschlossen werden.</u>

Dem Lernenden soll klar werden, wie mathematische Ideen geeignet sind um Probleme der Umwelt zu lösen.

- <u>Geometrie ist ein Teil unserer Kultur.</u>

Wenn man den Lernenden die historischen Wurzeln der Geometrie näher bringt und ihnen zeigt welche Beiträge die Geometrie in ihrer Entwicklung zur Lösung wichtiger Probleme geleistet hat, wird die Bedeutung der Geometrie für unsere Kultur den Schülern einsichtig.

- <u>Die Geschichte der Geometrie ist eng verbunden mit der Geschichte mathematischer Instrumente</u>.

Viele dieser Instrumente bzw. ihre Verfahren werden auch heute noch in moderner Form und Technik, wie z.B. bei der Ortsbestimmung oder der Vermessung, eingesetzt. Hier kann der Unterricht die Entwicklung der Mathematik im Verbund mit der Entwicklung der Technik den Schülern dargestellt werden.

- <u>Offener Unterricht</u>

Problemstellungen, in denen Mathematik und Technik zur Lösung praktischer Probleme eng miteinander verbunden sind, bieten Möglichkeiten, im Unterricht offen und selbständig bearbeitet zu werden, z.B. in Form von Projekten.

[1] WAGENSCHEIN, M. (1970): Mathematik aus der Erde. In: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Klett.

2. Didaktische Grundsätze zur Geometrie im Gelände nach Vollath

➢ Geometrie im Gelände soll keine Vermessungskunde werden

- Anwendungsmöglichkeiten verdeutlichen
- Schüler sollen Größenvorstellungen gewinnen
- Alltagstrott durchbrechen (Motivation)

➢ Die Arbeit im Gelände soll ein Ergebnis bringen

Zum Schluss soll ein Ergebnis stehen. Dabei ist neben dem Produkt auch der Prozess als Lerngewinn zu sehen.

➢ Die Arbeit im Gelände soll intensiv vorbereitet sein

Es ist wichtig, dass alle Lernvoraussetzungen (Organisatorisches...) geschaffen sind, dass der mathematische Hintergrund verstanden ist und dass die Schüler wissen, was sie vor Ort zu tun haben. Das Vorgehen muss klar sein; dabei ist ein Arbeitsplan mit Skizzen und Arbeitsschritten hilfreich.

➢ Geometrie im Gelände soll Größenvorstellungen schaffen

Durch Vermessen von Objekten, durch das eigenständige, selbsttätige Erarbeiten wird die Vorstellung von Größen intensiver verankert als durch alleiniges anschauen. Maßnahmen wie Schätzübungen festigen die gewonnenen Größenvorstellungen (Sie sollten vor jeder Messung durchgeführt werden)

➢ Bei der Arbeit im Gelände soll jeder Schüler beschäftigt sein

Chinesische Spruchweisheit: „Ich höre und ich vergesse. Ich sehe und ich erinnere mich. Ich tue und ich verstehe.“ Ist jeder Schüler beschäftigt, fällt es leichter die nötige Arbeitsdisziplin aufrechtzuerhalten.

➢ Geometrie im Gelände soll die Möglichkeit zur Sozialerziehung nützen

Durch Kooperation und Teamarbeit wird das soziale Verhalten gefördert.

- <u>Geometrie im Gelände sollte mit einfachen Geräten möglich sein</u>

Das Verständnis für geometrische Zusammenhänge soll für die Schüler durchschaubar bleiben und die Arbeitsmittel sollen evtl. selbst hergestellt werden können.

3. Allgemeiner Bezug zum Bildungsplan

Den Schülerinnen und Schülern sollen Fähigkeiten bzw. Kompetenzen vermittelt werden, die der Bildungsplan 2004, als personale, soziale, methodische und Fachkompetenzen bezeichnet. Des weiteren sollen sie lernen, „*Sachverhalte zu recherchieren, Beobachtungen zu protokollieren*, unter verschiedenen Beobachtungs-Gesichtpunkten zu wählen, ihre *Erkundungen zeitlich* und *sachlich* zu *planen*.“ [2] Genau hier sind die Ansatzpunkte, welche bei einem Projekt „Geometrie im Gelände“ verwirklicht werden können. So lassen sich die verschiedenen Kompetenzen durch die entsprechende Auswahl von Arbeitsformen, Methoden und fachlichen Lerninhalten gezielt fördern. Außerdem heißt es auf Seite 15 des Bildungsplans: “6. Mathematik als Geisteswissenschaft. Über die „Fähigkeit“ der Mathematisierung hinaus verfügen die Schülerinnen und Schüler über rudimentäre *Kenntnisse der euklidischen Geometrie* und der *Algebra*, also über die mathematischen Grundfunktionen: Zählen, *Messen*, Relationieren, *Strukturieren* (in Raum und Zeit), Algorithmisieren. […] Sie verfügen über mathematische Lösungsmodelle – wiederum elementarer Art – und über ein Repertoire an *mathematischen Darstellungsformen*: *Tabellen, Diagramme, Koordinatensysteme* – eine Mischung aus Fähigkeit und Kenntnis. Die Schülerinnen und Schüler haben Mathematik als ein ästhetisches Ereignis erfahren.“[3] Auch diese Forderungen könnten wiederum in einem Projekt ihre Verwirklichung finden.

---

[2] Kultus und Unterricht Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Baden-Württemberg, Bildungsplan für die Realschule, Lernplanheft 3/2004. Ministeriums für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.), Neckar-Verlag GmbH, Villingen-Schwenningen, 2004, S. 13
[3] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 15.

Im Bildungsplan werden auch verschiedene didaktische und methodische Prinzipien genannt, welche ebenfalls durch eine entsprechende didaktische Aufbereitung bei dem Vermessen im Gelände realisiert werden können.

- „2. Die Lernhandlung erlaubt nicht nur, sie verlangt *Selbstständigkeit, Eigenverantwortung und Selbstkontrolle* (selfdirection).“ [4]
- „8. Der Erfolg des veranstalteten Lernens ist stark von einer sinnvollen Rhythmisierung abhängig – einem *Wechsel von Konzentration und Gelassenheit*, von Aufnahme und Wiedergabe, von *körperlich-sinnlicher und geistiger Beanspruchung*.“[5]
- „10. *Außerschulische Erfahrungen und außerschulischer Einsatz* tragen in hohem Maß zur Lernmotivation bei, sind darum systematisch einzubeziehen und bei der Bewertung hoch zu veranschlagen. *„Aus der Schule gehen – etwas in die Schule mitbringen“*, diese Maxime steigert die Wirksamkeit der Schule und ihre Gegenstände.“[6]
- „10. Sport, Spiel und *Bewegung* erfahren in allen Schulen eine *über den Sportunterricht hinausgehende Förderung* – in den Pausen, auf *Exkursionen*, im Zusammenwirken mit Sportvereinen.“[7]

Allgemeiner Bezug zu den Leitgedanken zum Kompetenzerwerb im Fach Mathematik

In den Leitgedanken zum Kompetenzerwerb für Mathematik der Realschule (Klassen 6, 8, 10) sind uns wiederum Schlagwörter (kursiv) aufgefallen, welche bei der Umsetzung im Unterricht auftauchen können bzw. ihre Realisation dort finden können, dort heißt es explizit:

- Mathematik befähigt Schülerinnen und Schüler, Probleme mit Hilfe unterschiedlicher heuristischer Strategien zu lösen. Dabei werden Strukturen, die in einem allgemeinen Kontext enthalten sind, erkannt, Probleme formuliert und visualisiert,

[4] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 16.
[5] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 17.
[6] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 17.
[7] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 19.

Beziehungen und Regelmäßigkeiten entdeck sowie Übertragungsmöglichkeiten von einem Problem auf ein anderes wahrgenommen. Dies geschieht sowohl bei der *Übersetzung der realen Welt in die mathematische* als auch bei innermathematischem Arbeiten."[8]

- „Das Kennenlernen verschiedener Zugangsmöglichkeiten zum Lösen eines Problems, das *Wählen eines eigenständigen Lösungswegs* und seine Präsentation sowie das *Reflektieren über eine Lösung* im Hinblick auf das Ausgangsproblem fördern den Erwerb von Kompetenzen wie *Durchhaltevermögen, Zuverlässigkeit und Ausdauer*, *sowie Genauigkeit, Sorgfalt* und Verantwortungsbereitschaft, zudem Urteilsfähigkeit und kritisches Reflektieren."[9]

[8] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 60.
[9] Kultus und Unterricht: Ebd., S. 60.

4. Das Försterdreieck – Der Höhenmesser des Försters

„Heute noch erinnere ich mich daran, wie erstaunt ich war, als ich zum ersten Male den grauhaarigen Förster sah, der neben einer hohen Kiefer stand und ihre Höhe mit Hilfe eines winzigen Tascheninstruments zu bestimmen versuchte. Als er mit dem kleinen, viereckigen Täfelchen nach der Baumkrone peilte, dachte ich, der Alte würde nun den Stamm hinaufklettern und mit der Messkette die Höhe messen. Statt dessen steckte er sein Gerät in die Tasche und erklärte, er sei fertig. Und ich hatte mir eingebildet, er sei überhaupt erst am Anfang! Damals war ich noch sehr jung.“ (Perelman, 1963, S. 11)

Ein kleines Kind hält ein solches Messverfahren, bei dem der Förster die Höhe des Baustammes bestimmt, ohne dass er den Baum erklettert oder fällt, für ein kleines Wunder.

Abb.4.1:ProfessionellesFörsterdreieck.

Abb.4.2:Selbstgebautes Försterdreieck

Ältere Kinder, Schüler der Klasse 7, die mit den Anfängen der Geometrie vertraut sind, begreifen wie ein derartiges „Wunder“ geschieht.
Es gibt zahlreiche Methoden, die Höhe eines Baumes zu bestimmen und bei denen nur sehr primitive oder überhaupt keine Vorrichtungen gebraucht werden. Ein dafür geeignetes Messgerät, das man auch immer wieder in Mathematikschulbüchern findet, ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, das sogenannte Försterdreieck.

4.1 Der Bau eines Försterdreiecks

4.1.1Variante 1

4.1.1.1 Material

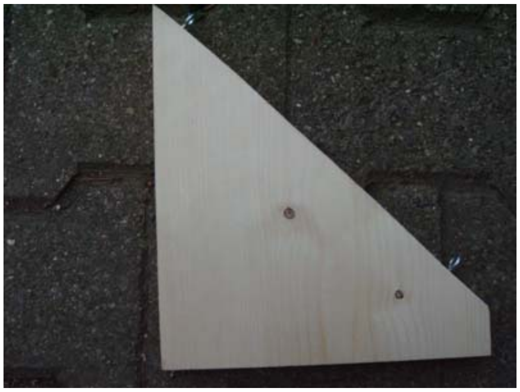
Man benötigt natürlich neben dem entsprechenden Werkzeug (Säge, Bohrer, Hammer, Zange, Leim, Alleskleber) zunächst folgende **Materialien**:

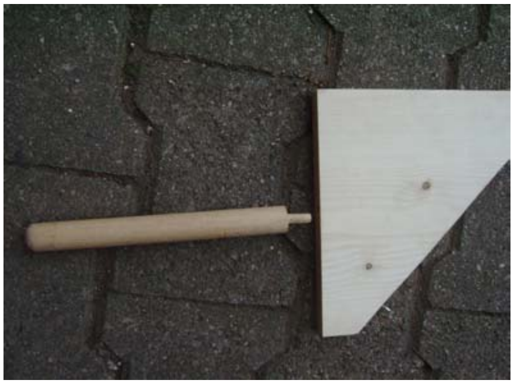
- einen Griff, am besten aus einem Rundholz, ca. 10 cm lang
- ein rechtwinkliges Holzdreieck (Leimholz Buche), Schenkel jeweils 25 cm
- eine kleine Libelle (Herz einer Wasserwaage)
- einen kleinen Spiegel, ungefähr 5 cm * 3cm
- 2 Ringschrauben mit Holzgewinde 12mm x Durchmesser 5mm x 2mm
- Holzdübel zum Verbinden
- 2 Holzklötzchen von der Größe passend zu Libelle und Spiegel

4.1.1.2 Herstellung

<u>Schritt 1</u>

Als Erstes wird die Holzplatte in der Diagonalen durchgesägt, so dass zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke entstehen. Danach wird eine der 45° Ecken senkrecht abgesägt um Verletzungen am Auge vorzubeugen.
Als nächstes werden die Ösenschrauben in die Hypotenuse gedreht, so dass beide gleichweit eingedreht sind.





Schritt 2

Nun wird der Rundstab (als Griff) mit Hilfe des Dübels an die verkürzte Kathete geleimt.

Schritt 3

Als nächstes wird an die Seite des Dreiecks ein Holzblock mit Hilfe des Doppelklebebandes befestigt und darauf die Libelle geklebt (parallel zur abgesägten Kathete).

Schritt 4

Als nächstes wird der andere Holzblock (auf den der Spiegel geklebt wird) auf derselben Seite wie die Libelle so angebracht, dass man im Spiegel die Libelle sieht wenn man peilt.

4.1.2. Variante 2

Das Försterdreieck wird im Schwerpunkt aufgehängt, somit werden Libelle und Spiegel überflüssig.

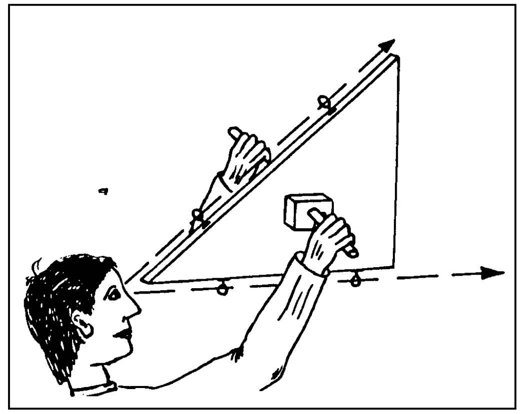


Abb. 4.3.: Alternative 2, im Schwerpunkt aufgehängt[10]

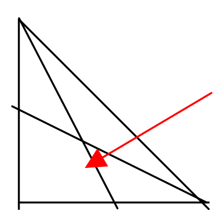
4.1.2.1 Material

Man benötigt hierfür verschiedene Bohrer und folgendes Material:

- einen Griff, am besten aus einem Rundholz, ca. 10 cm lang (dünner als die Platte für das Holzdreieck)
- ein rechtwinkliges Holzdreieck (Leimholz Buche), Schenkel jeweils 25 cm
- 2 Ringschrauben mit Holzgewinde 12mm x Durchmesser 5mm x 2mm
- Holzdübel zum Verbinden
- eine Schnur, mindestens 1 Meter lang
- eine Mutter

4.1.2.2 Herstellung

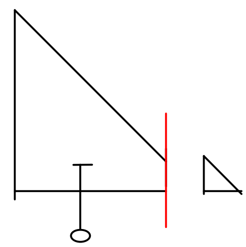
<u>Schritt 1:</u> Der Schwerpunkt des Dreiecks wird über die Seitenhalbierenden bestimmt und 2cm darunter der Punkt A angezeichnet (siehe Zeichnung).



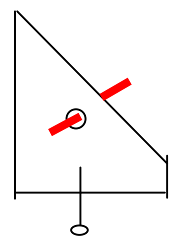
[10] VOLLATH, E. (1995). Geometrie im Gelände. Peilen und Messen in freier Natur. Donauwörth: Ludwig Auer.S. 13

Schritt 2: An das eine Ende der Schnur wird die Mutter als Gewicht angeknotet. Am Punkt A wird ein breiteres Loch (Schlitz) durch die Holzplatte gebohrt und das andere Ende der Schnur wird darin festgeknotet. Der Schlitz dient der Beweglichkeit des Lots (Schnur mit Mutter) zum genauen Ausloten der Horizontalität.

Schritt 3: An einer Ecke des Holzdreiecks wird ein kleines Dreieck mit der Seitenlänge 3 cm abgesägt (siehe Bild rechts).

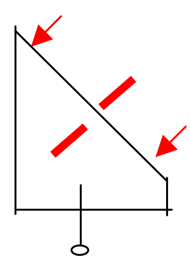


Schritt 4: Nun ist es wichtig, das zweite Loch über dem zuvor bestimmten Schwerpunkt zu bohren. Es sollte groß genug sein, damit das Rundholz durch passt.



Der genaue Punkt für das Loch sollte so gewählt werden, dass die Grundseite des Dreiecks exakt waagerecht hängt, wenn man es nachher an dem Rundholz festhält.

Schritt 5: Nun werden noch die 2 Löcher für die Ringschrauben zum Durchschauen mittig auf der oberen Kante des Dreiecks, gebohrt und die Schrauben eingeschraubt (die Zange hilft hier).



4.2 Funktion eines Försterdreiecks

Bevor man misst, muss man das Försterdreieck so halten, dass die untere Kathete lotrecht steht, d.h. die Libelle sollte sich zwischen den zwei Markierungen befinden.

Nun peilt man entlang der Hypotenuse die oberste Spitze des zu vermessenden Objektes an. Dabei durch die beiden Ösen schauen und Libelle über den Spiegel genau beobachten. Je nach Größe des zu messenden Objektes muss man sich auf das Objekt zu- oder wegbewegen, bis man die Spitze des Objektes durch die beiden Ösen sehen kann.

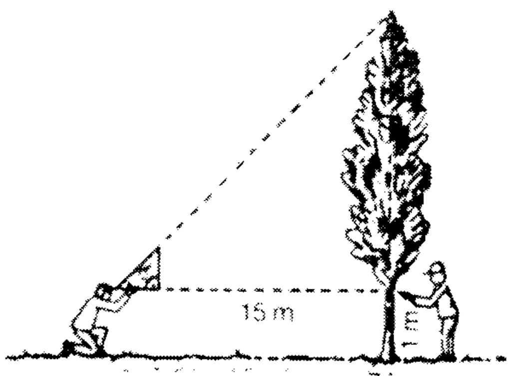
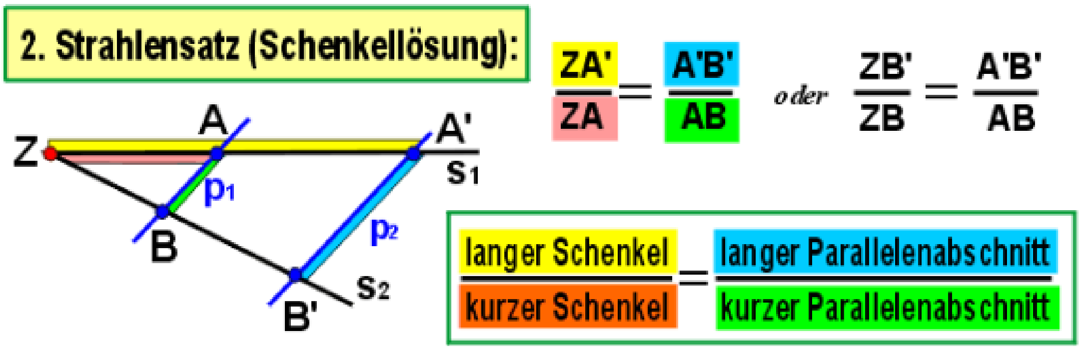


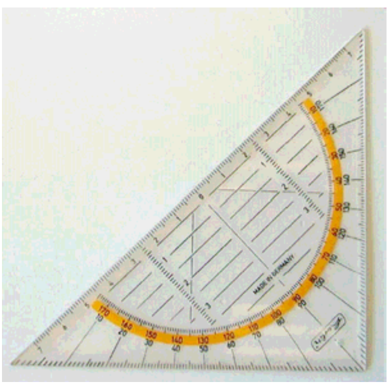
Abb.4.4.: Ermittlung der Höhe des Baumes

Im nächsten Schritt muss nur noch der Abstand zwischen der Person und dem Objekt mittels Maßband o.ä. ermittelt werden und die Höhe (Augenhöhe) notiert werden, in der man das Försterdreieck gehalten hat. Nun kann mit der Berechnung, wie folgt, fortgefahren werden.

4.3 Mathematischer Hintergrund



Das Försterdreieck basiert auf dem zweiten Strahlensatz. Doch wendet man bei dem Försterdreieck einen Trick an, um die Ermittlung der Höhe z.B. eines Baumes zu vereinfachen.



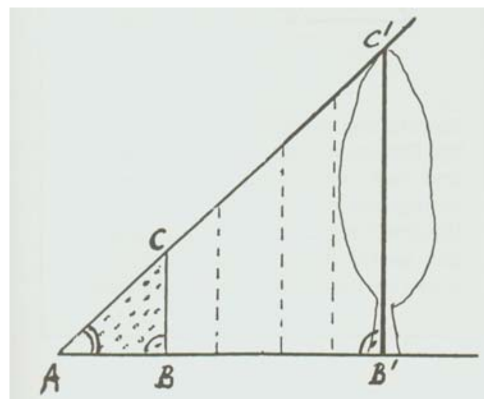


Abb. 4.5: Zentrische Streckung [11]

Verwendet man für ein Försterdreieck ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (siehe Geo-Dreieck), so sind die Strecken AB' und B'C' immer gleich lang. (Siehe Abbildung 4.5).

Somit ergibt sich eine einfache Rechnung für die Höhe eines Messobjektes:

- ***Entfernung des Vermessers zum Gegenstand zuzüglich dessen Augenhöhe*** (Siehe Abb. 4.6)

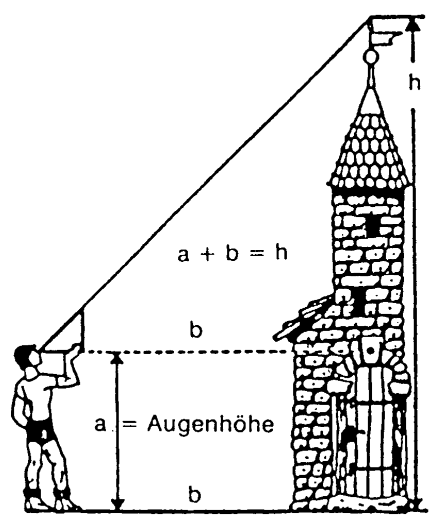


Abb.: 4.6 Höhenberechnung[12]

[11] Vollath 1995, S. 73

4.4 Konkreter Bezug zum Bildungsplan

Das Försterdreieck kann in verschiedenen Klassenstufen in den Unterricht eingebaut werden. Eine Möglichkeit besteht in Klasse 7 und 8. Der Bildungsplan sieht vor: - *Lagebeziehungen geometrischer Objekte erkennen, beschreiben und sie beim Problemlösen nutze*n. Das Försterdreieck ist ein praktisches Beispiel Gegenstände mit Hilfe der Ähnlichkeit von Dreiecken zu messen. Außerdem hilft eine Vermessung im Gelände allgemein Größenvorstellungen zu entwickeln und Zusammenhänge zu erschließen.

Der Bildungsplan sieht folgendes vor: **2. Leitidee Messen** - *Zahlen, Größen und geometrische Objekte mit Vorstellungen verbinden.*
Eine andere Möglichkeit ergibt sich in Klasse 9 und 10. Unter Punkt **3. Leitidee Raum und Form** der Klasse 10 heißt es: - *Eigenschaften geometrischer Objekte und ihrer Beziehungen untereinander erkennen, begründen und sie zur Analyse von Sachzusammenhängen beim Problemlösen nutzen.* Außerdem ist das Schätzen der Höhe eines Gegenstandes wichtiger Bestandteil der Messung: **2. Leitidee Messen** - *auf Grund von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten Größen schätzen.*
Wenn das Försterdreieck im Rahmen der Strahlensätze in den Unterricht integriert wird, so kann auch ein Försterdreieck, welches nicht gleichschenklig ist, benutzt werden. In diesem Fall müssen die Schüler nach der Messung im Gelände noch eine Gleichung mit Hilfe des Strahlensatzes aufstellen, um die Höhe h zu bestimmen.

---

[12] ebd. S. 15

5. Das Drehkreuz

5.1 Der Bau eines Drehkreuzes

5.1.1 Material

Material für das Drehkreuz:

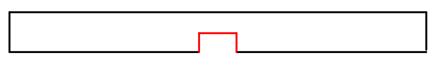
- zwei Holzleisten (ca. 80 cm*5cm *3cm)
- vier Schrauben mit Ösen

Material für das Stativ:

- Holzleiste z.B. Besenstiel (ca. 120-160 cm, je nach Augenhöhe der Schüler)
- Holzscheibe (Durchmesser: ca. 15 cm)
- Holzdübel
- zwei Schrauben
- Sowie Säge, Zange, Leim und Bohrer, Stechbeitel und Raspel

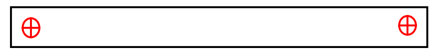
5.1.2 Herstellung des Drehkreuzes

Schritt 1: An den beiden Brettern wird jeweils in der Mitte eine Kerbe herausgenommen:

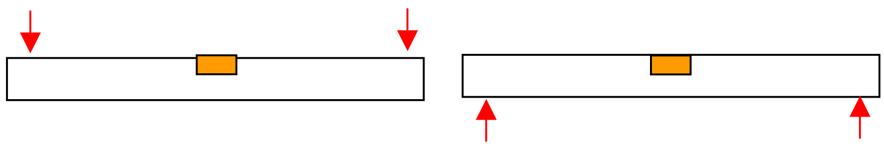


Zunächst sägt man rechtwinklig zur Länge der Bretter zwei Schlitze. Diese sollten bis zur Hälfte der Stärke hinein reichen und sollten eine Brettbreite von einander entfernt sein. Das Material dazwischen entfernt man am besten mit einem Stechbeitel und einer Raspel. Die Kanten der ausgesägten Stücke sollten exakt rechtwinklig sein, dass wenn man die Bretter an den Aussparungen zusammensteckt, diese genau passen.

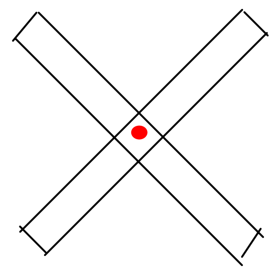
<u>Schritt 2:</u> Je 2 Ringschrauben werden an den Enden der Bretter mittig am besten mit einer Zange eingeschraubt;



(Man muss evtl. vorbohren) am ersten Brett oben, am zweiten unten:



<u>Schritt 3:</u> Nun werden die beiden Bretter zusammengesteckt und in der Mitte ihrer zuvor gesägten Aussparungen wird ein Loch in der Größe des Holzdübels gebohrt.



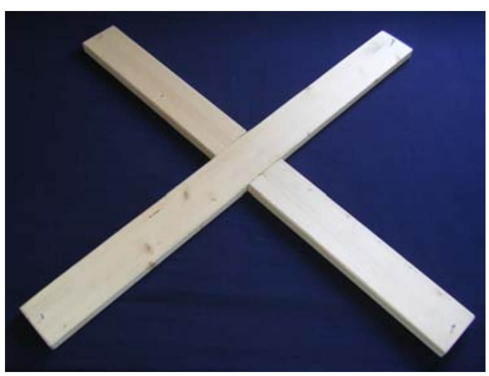


Abb. 5.1 Drehkreuz

Herstellung des Stativs:

<u>Schritt 1:</u> In die Mitte der Holzscheibe wird mit dem passenden Bohrer ein Loch gebohrt und der Dübel wird darauf geleimt. Dabei ist darauf zu achten, dass der Dübel nur so weit in die Scheibe eingelassen wird, dass die beiden Bretter auch noch darauf gesteckt werden können.

<u>Schritt 2:</u> Die Holzscheibe wird auf die Stirnseite der Holzleiste geschraubt.

5.2 Die Funktion eines Drehkreuzes

Abb. 5.2: Das Drehkreuz mit Stativstab.

Abb.5.3: Das Drehkreuz von oben.

Die Funktion des Drehkreuzes liegt in der Bestimmung eines rechten Winkels.
Zur Ermittlung rechter Winkel sind zwei Personen notwendig, welche am Drehkreuz z.B. Messlatten oder andere Punkte anvisieren und somit den rechten Winkel ermitteln.

Abb.5.4 Anvisierung eines Punktes mit dem Drehkreuz

Abb. 5.5 Überprüfen mit der Wasserwaage

Wichtig ist, dass das Stativ senkrecht auf den Boden gestellt wird. Dabei kann eine Wasserwaage helfen. (vgl. Abb. 5.5)

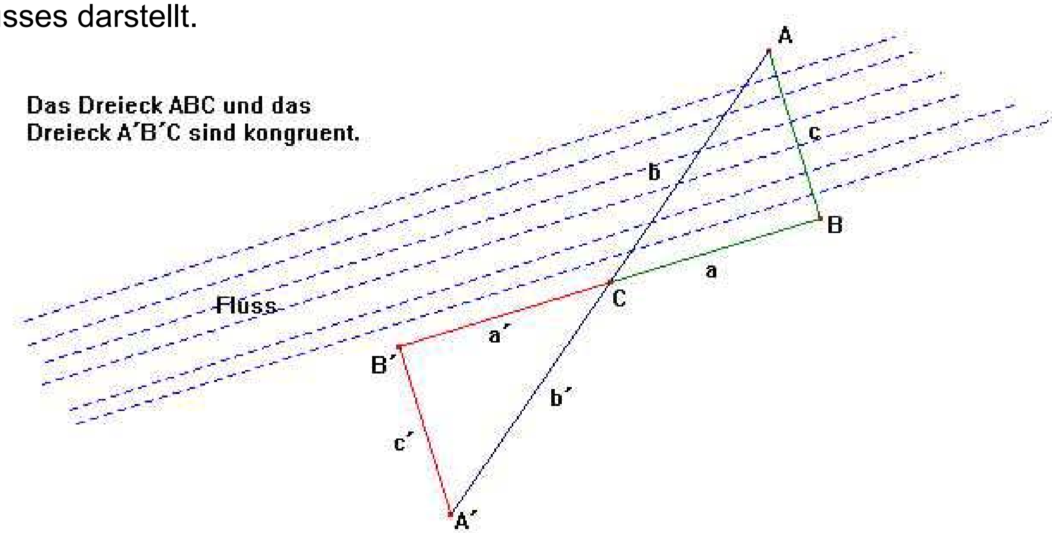
5.3 Anwendungsmöglichkeiten

- **Ermittlung einer Strecke mit dem Satz des Pythagoras**

Mit Hilfe des Drehkreuzes kann so der Abstand zwischen zwei Objekten A und B bestimmt werden. Ein Punkt C, in dem das Drehkreuz aufgestellt wird, muss so ausgewählt werden, dass die Punkte A und B direkt anvisiert werden können. Nach der Vermessung der Strecken AC und BC lässt sich über den Satz des Pythagoras die Strecke AB errechnen. Diese Methode eignet sich vor allem für ein Gelände, in dem die Strecke AB nicht abgelaufen werden kann.

- **Ermittlung einer Strecke mit Drehen von Dreiecken**

Auch die Breite eines Flusses lässt sich unter Zuhilfenahme des Drehkreuzes bestimmen. Nachdem man eine markante Stelle am jenseitigen Ufer ausgemacht hat (Punkt A), richtet man das Drehkreuz am genau gegenüberliegenden Punkt B am diesseitigen Ufer aus. Nun wird mit dem Drehkreuz der Punkt A anvisiert und am diesseitigen Ufer in der Flucht des Drehkreuzes eine beliebige Strecke BC abgesteckt. Diese Strecke BC wird verdoppelt, es entsteht die Strecke BC`. Vom Punkt C` zweigt man nun wiederum im rechten Winkel ab und marschiert so weit vom Fluss weg, bis die Punkte B und A auf einer Geraden liegen. Der so ermittelte Punkt wird mit A´ bezeichnet. Die Strecke A`C` entspricht nun der Strecke AC, welche die Breite des Flusses darstellt.



- **Ermittlung des Flächeninhaltes eines begehbaren konvexen Polygons (z.B. Flurstück) mit der Standlinienmethode**

Bei einem Feld oder Flurstück handelt es sich mathematisch gesehen um ein Polygon. Möchte man dessen Fläche berechnen, so gelingt dies, wenn man die Fläche in Teilflächen zerlegt, die sich berechnen lassen.

In diesem Sinne wird das Flurstück theoretisch in Dreiecke und Trapeze aufgeteilt. Angenommen das Feld hätte folgende Form:

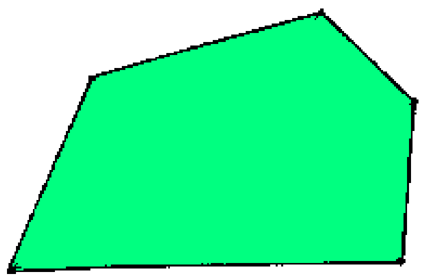


Abb. 5.6 Flurstück in Form eines Polygons

Die Aufteilung könnte wie folgt aussehen:

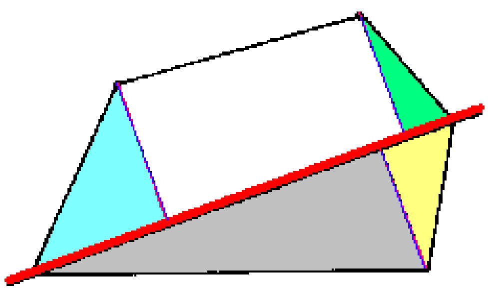
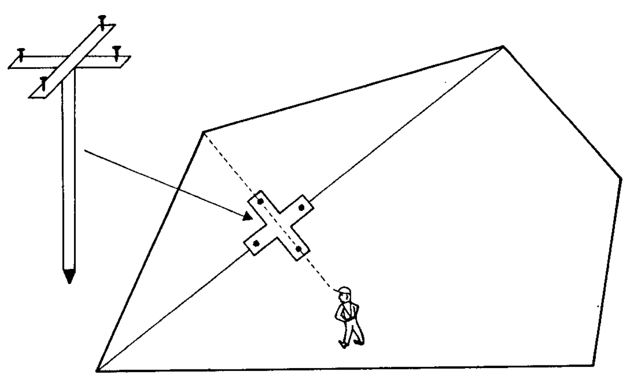


Abb. 5.7 Das Flurstück wird in Trapeze und rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt



Man sucht sich die längste Diagonale (rot eingezeichnet). Diese wird als Standlinie bezeichnet (deshalb Standlinienmethode). An dieser läuft man mit dem Drehkreuz entlang und peilt jede Ecke des Polygons senkrecht zur Standlinie an. Anschließend wird die Strecke von der Standlinie zum Eckpunkt und die Strecke auf der Standlinie gemessen.

Die Dreiecke und Trapeze werden einzeln berechnet und addiert.

Benötigte Geräte für die Standlinienmethode:

- Drehkreuz (oder jedes andere beliebige Messinstrument zum Messen eines rechten Winkels, z.B. Winkelspiegel)
- Maßband (je länger desto besser)
- Fluchtstäbe (mindestens 3; besser: 5 oder mehr)
- Maurerschnur oder Band (zur Erleichterung der Arbeit)
- Wasserwaage (zur Kontrolle, ob Drehkreuz senkrecht steht)
- Schreibzeug

Planung

Zuerst sollte man sich einen groben Überblick über das Feld machen, am Besten, indem man es abläuft.
Anschließend sollte von den Vermessern eine grobe Skizze angefertigt werden, um besser sehen zu können, wo die längste Diagonale verläuft (Wählt man die längste Diagonale so vereinfacht dies den Messvorgang, denn so liegen alle rechten Winkel in dem Flurstück). In der Skizze sollte auch die Aufteilung in Teilflächen erkennbar sein. Dies dient der besseren Orientierung bei der anschließenden Vermessung. Außerdem können dort die gemessenen Werte eingetragen werden.

Durchführung

Auf dem Feld steckt man die Endpunkte der Diagonalen (Standlinie) ab, damit man sich in der weiteren Vermessung an ihnen orientieren kann. Die Eckpunkte des Polygons werden mit Fluchtstäben gekennzeichnet, entsprechend der Feldgröße und der Anzahl der verfügbaren Fluchstäbe alle auf einmal oder nacheinander.
Nun läuft man mit dem Drehkreuz an der Standlinie entlang und versucht die beiden Diagonalenpunkte und Eckpunkte des Polygons senkrecht zueinander anzupeilen. Eine ausgelegte Schnur entlang der Standlinie erleichtert hierbei die Orientierung.
Hat man das Lot zwischen Diagonale und Polygoneckpunkt gefunden, vermisst man diesen Abstand. Vorher sollte man allerdings nochmals überprüfen, ob Drehkreuz und Fluchtstab senkrecht stehen (Wasserwaage) und ob die Peilung korrekt ist. Ansonsten wird die Messung ungenau.
Diesen Schritt wiederholt man bis alle Polygonecken erfasst sind.

5.4 Bezug zum Bildungsplan

Die „Kompetenzen und Inhalte für Mathematik – Klasse 8“ (S.63; Bildungsplan Realschule 2004; Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport; Stuttgart; 2004) fordern:

<u>Leitidee Messen</u>

Die Schülerinnen und Schüler können

- Zahlen, Größen und geometrische Objekte mit Vorstellungen verbinden
- die Prinzipien der Längen-, und Winkelmessung sowie der Flächen- und Volumenberechnung nutzen
- Messergebnisse in sinnvollen Einheiten angeben
- mit Formeln zur Berechnung von Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks umgehen, sie variieren und verstehen und sie auf zusammengesetzte Figuren anwenden
- Inhalte mathematischer Themenbereiche dokumentieren und präsentieren

<u>Inhalte</u>
Umfang und Flächeninhalt von Vielecken
Dreieck, Trapez, Parallelogramm

<u>Leitidee Raum und Form</u>

Die Schülerinnen und Schüler können

- geometrische Zusammenhänge mithilfe von bekannten Strukturen erschließen und sie
- algebraisch veranschaulichen und darstellen
- Lagebeziehungen geometrischer Objekte erkennen, beschreiben und begründen und sie beim
- Problemlösen nutzen
- bei Konstruktionen, Berechnungen und einfachen Beweisen Sätze der Geometrie anwenden

<u>Inhalte</u>
Vielecke
Dreieck, Trapez, Parallelogramm

Voraussetzungen für den Unterricht

Da die Vermessung mit dem Winkelkreuz im Freien und womöglich nicht auf dem Schulgelände stattfindet, sollten die Schüler auf den Ausflug vorbereitet werden. Die Gefahren, Pflichten und Freiheiten sollten vorher klar definiert werden. Der Lehrer muss Vertrauen gegenüber den Schülern haben, so dass unerwartete „Überraschungen" eingedämmt werden können.

Das Winkelkreuz sollte in den Stunden davor, eventuell in Kooperation mit anderen Fächern, gebaut und besprochen werden. Für die Messung braucht man ausreichend Maßbänder und Messlatten. Diese können eventuell vom Bereich Sport ausgeliehen werden.

Ein Vermessungsteam sollte aus 3-5 Schülern bestehen (2 Schüler am Gerät; 1 Protokollant; 1 Schüler, der die Zahlen abliest; 1 Schüler, der die Messlatte hält) und diese Teams sollten auch schon vor der Vermessung festgelegt werden.

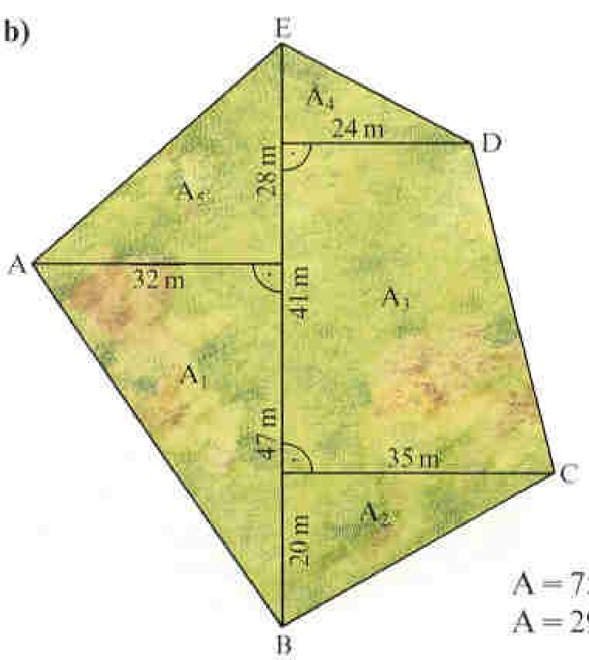
Zur anschließenden Berechnung der Vermessungsfläche sollten die Schüler Vorkenntnisse in der Flächenberechnung und Kenntnisse über den rechten Winkel haben.

5.5 Beispiel aus einem Schulbuch

Das Schulbuch Schnittpunkt 8, erschienen 1995 beim Klett Verlag stellt die Aufgabe so:

Vielecke

b)



Um den Flächeninhalt des fünfeckigen Grundstücks ABCDE auszurechnen, wird es in fünf Teilflächen zerlegt. Die Maße, die für die Berechnung der Flächeninhalte benötigt werden, kann man aus der Zeichnung entnehmen.

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 47\ m^2 = 752\ m^2$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 35\ m^2 = 350\ m^2$

$A_3 = \frac{1}{2} \cdot (35 + 24) \cdot 41\ m^2 = 1209{,}5\ m^2$

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24\ m^2 = 168\ m^2$

$A_5 = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 32\ m^2 = 448\ m^2$

$A = 752\ m^2 + 350\ m^2 + 1209{,}5\ m^2 + 168\ m^2 + 448\ m^2$

$A = 2927{,}5\ m^2$

6. Der Winkelspiegel

Carl Maximilian von Bauernfeind (1818-1894) Ingenieur und Geodät erfand das nach ihm benannte *Bauernfeind'sche Winkelprisma* und das Prismenkreuz, die in der Vermessung unentbehrliche Hilfsmittel wurden.
Ebenso gibt es in Großbritannien Erzählungen, nach denen dort Winkelspiegel bereits schon seit ca. 250 Jahren als Messhilfe benutzt wurden (George Adams, London, 1796).

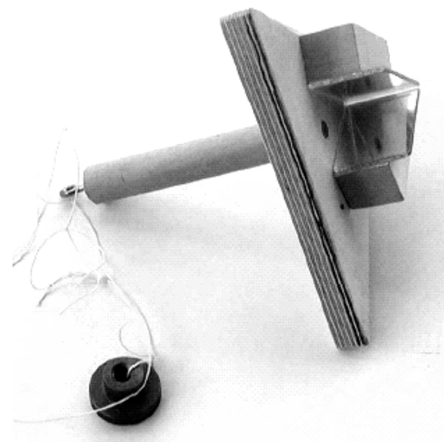


Abb.6.1: Selbstgebauter Winkelspiegel

6.1 Bau eines Winkelspiegels

6.1.1 Material

- Pressspanplatte (1,5 — 2cm dick)
- Rundstab
- Planspiegel
- Holzdübel (für Griffbefestigung)
- Holzleim, doppelseitiges Klebeband
- Schnur
- 1 Öse mit Gewinde (zur Befestigung der Schnur mit Senklot)
- 1 Schraube (zur Verstellung eines Spiegels)
- Mutter oder Senklot (als Lot)

6.1.2 Herstellung des Winkelspiegels

Zuerst wird ein gleichseitiges Dreieck aus der Spanplatte ausgesägt. Dann wird in die Mitte der Platte ein Loch zur Befestigung des Haltegriffs gebohrt.
Aus den Resten der Spanplatte werden die zwei Halteklötzchen für die Spiegel zugesägt. Ein Spiegel wird mit doppelseitigem Klebeband auf das bereits auf der Grundplatte befestigte Halteklötzchen geklebt. Da die Einstellung sehr empfindlich

gegenüber Montagefehlern ist, wird das zweite Klötzchen auf der Grundplatte verstellbar angebracht. Dazu wird in der Mitte des zweiten Spiegelhalteklötzchens vertikal ein Loch gebohrt. Anschließend wird der zweite Spiegel auf das Klötzchen geklebt. Das zweite Spiegelhalteholz wird im Winkel von 45 Grad zum anderen Spiegelhalteholz auf die Grundplatte mit einer Schraube fest aber drehbar angeschraubt.

Abb. 6.2: Anordnung der Spiegel

Zwischen den beiden Spiegelhaltehölzern sollte ein kleiner Spalt sein, um ein justieren zu ermöglichen. Somit kann der Winkelspiegel mit Hilfe eines Geodreiecks immer wieder nachjustiert werden. Der als Handgriff dienende Rundstab wird mit der dreieckigen Grundplatte und einem Holzdübel verleimt. Zum Schluss wird das Senklot (z.B. eine Mutter) mit dem Faden an der Öse des Rundgriffs befestigt.

6.2 Die Funktionsweise des Winkelspiegels

Um im Gelände schnell und einfach einen rechten Winkel bestimmen zu können, eignet sich der Winkelspiegel sehr gut, er ist eine kostengünstige und einfach zu realisierende Lösung. Er beruht darauf, dass zwei Spiegel welche im Winkel 45° zueinander stehen, einen Lichtstrahl im rechten Winkel reflektieren (siehe Zeichnung). Dabei spielt der Einfallswinkel des Lichtstrahls keine Rolle, durch die Spiegelstellung von 45° wird der Strahl immer in einem 90° Winkel zurück zum Auge des Betrachters geworfen. Somit kann man 2 Dinge gleichzeitig beobachten, die im 90 ° Winkel zueinander stehen. Für eine Vermessung ein großer Vorteil.

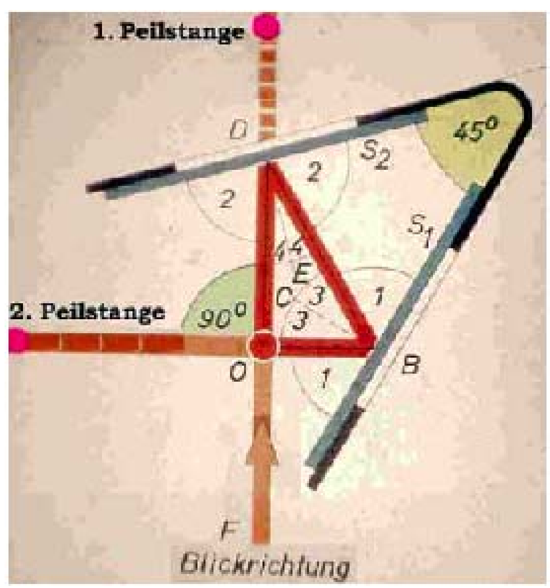
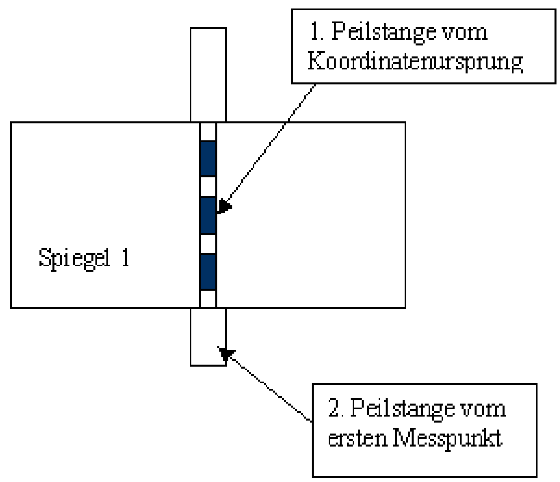


Abb.6.3.: Strahlengang an einem Winkelspiegel

Benutzung des Winkelspiegels

Der Benutzer des Winkelspiegels sucht sich einen Gegenstand heraus (hier unsere 2. Peilstange), zu dem er einen Rechten Winkel haben möchte. Um diesen Rechten Winkel zum Ursprung des Koordinatensystems zu bilden, muss man nun das Spiegelbild der 1. Peilstange (Ursprung) im 1. Spiegel über das reale Bild von der 2. Peilstange legen. Sind diese 2 Bilder der Peilstangen genau übereinander anvisiert, hat man einen 90° Winkel. (Siehe Abbildung)



AAbb.6.4: Blick in den 1.Spiegel des Messgerätes

Der optische Winkel ist vor Gebrauch zu eichen, da die Einstellung sehr empfindlich gegenüber Messfehlern ist. Daher sollte man einen der beiden Spiegel auf einem einstellbaren Winkel, der auf der Grundplatte drehbar ist, montieren. Nun kann leicht mit einem Geodreieck die 45°-Stellung der zwei Spiegel eingestellt werden.

6.3 Zur Theorie des Winkelspiegels

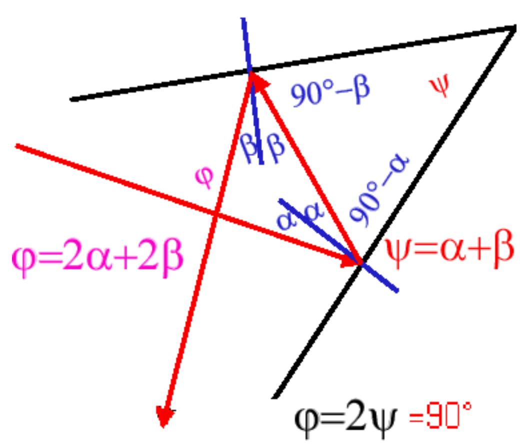
Die Winkelsumme im oberen Dreieck setzt sich wie folgt zusammen:

$\Psi + (90° - \beta) + (90° - \alpha) = 180°$

Umgeformt:

$\Psi = 180° - 90° + C - 90° + \alpha$

$\Psi = \alpha + \beta$



Die Winkelsumme im roten Dreieck setzt sich zusammen aus:

Abb. 6.5 Betrachtung der Winkel

$\varphi = 180° - 2 * \alpha - 2 * \beta$ wir wissen ja, dass $\Psi = \alpha + \beta$ somit erhält man:

$\varphi = 180° - 2 (\alpha + \beta) \rightarrow \varphi = 180° - 2 \Psi$

Da Ψ= 45° ist, ergibt sich für φ **= 90°**

6.4 Vermessung eines Sees mit dem Winkelspiegel

Ist das Gelände nicht begehbar, z.B. ein Gewässer oder umzäunt, dann verwendet man die Koordinatenmethode. Als erstes muss man mit zwei Maßbändern ein Koordinatensystem an dem zu vermessenden Gelände anbringen. Das eine Maßband stellt die X-Achse dar und das andere die Y-Achse. Beide Maßbänder sollten am Nullpunkt (0/0) einen 90°-Winkel bilden. Mit dem Winkelspiegel lässt sich dieser leicht festlegen.

Ist man soweit, bietet es sich an, mit zwei Winkelspiegeln und einer Messlatte zu arbeiten. Vier Personen sind hierbei am Messvorgang beteiligt. Zwei Vermesser mit den Winkelspiegeln, einer der die Messpunkte um den See festlegt (und dort die Messlatte hält) und ein Protokollant. Die beiden Vermesser sind je für eine Achse verantwortlich. Sie bewegen sich auf dem Maßband vor und zurück, bis sie einen 90°-Winkel zwischen sich, der Messlatte des Assistenten und der Messlatte im Nullpunkt feststellen. Das heißt ein Vermesser liefert dem Protokollanten die X-Werte für die Messpunkte und der andere die dazugehörigen Y-Werte. Diese ermittelten Punkte lassen sich nun leicht in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem übertragen. (Siehe Abbildung 6.6)

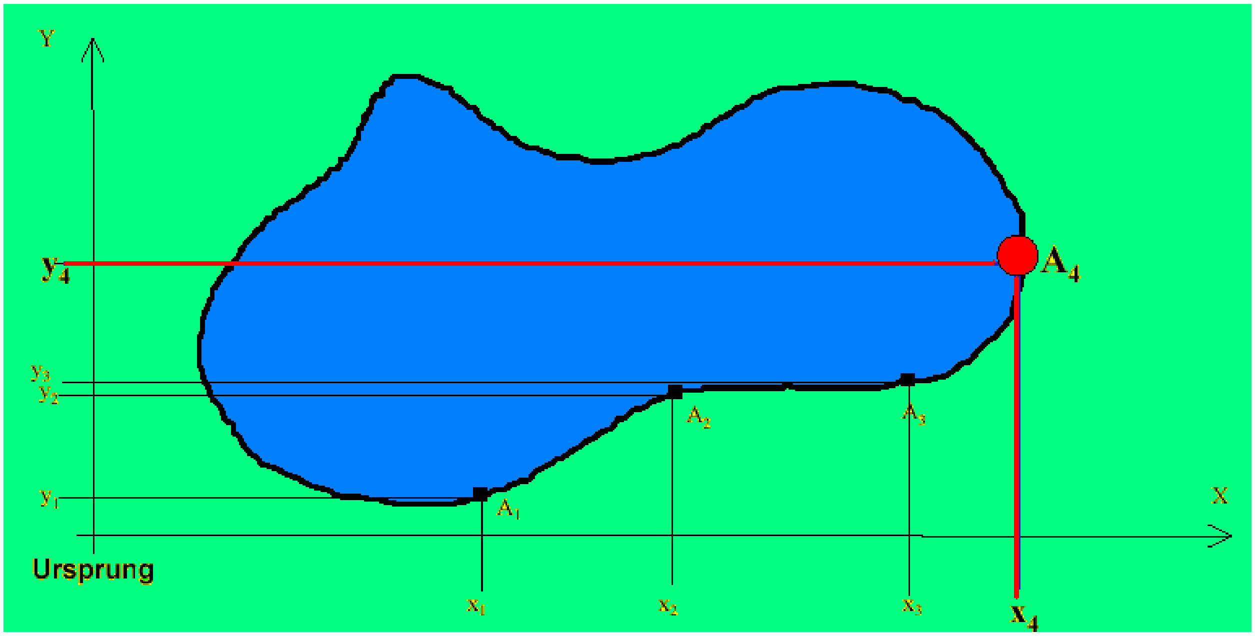


Abb. 6.6: Koordinaten Methode

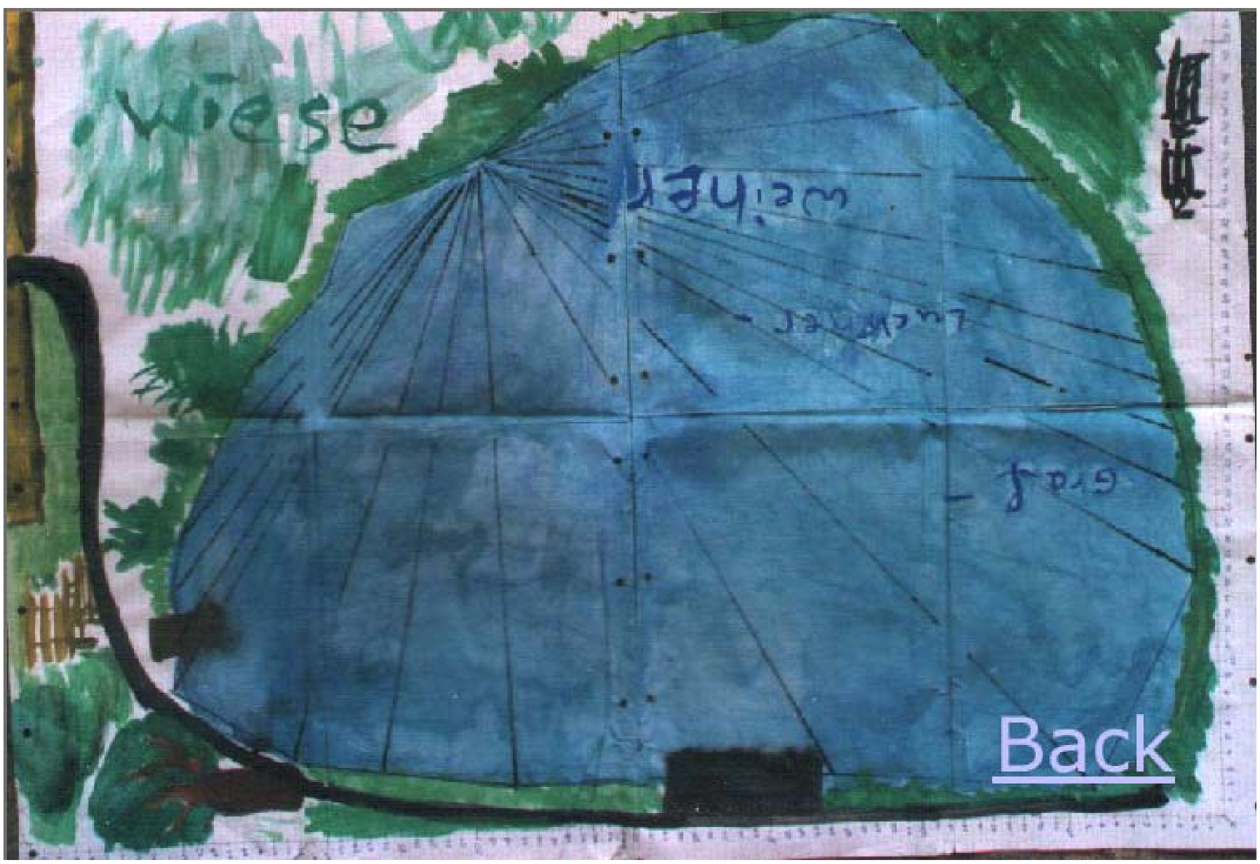
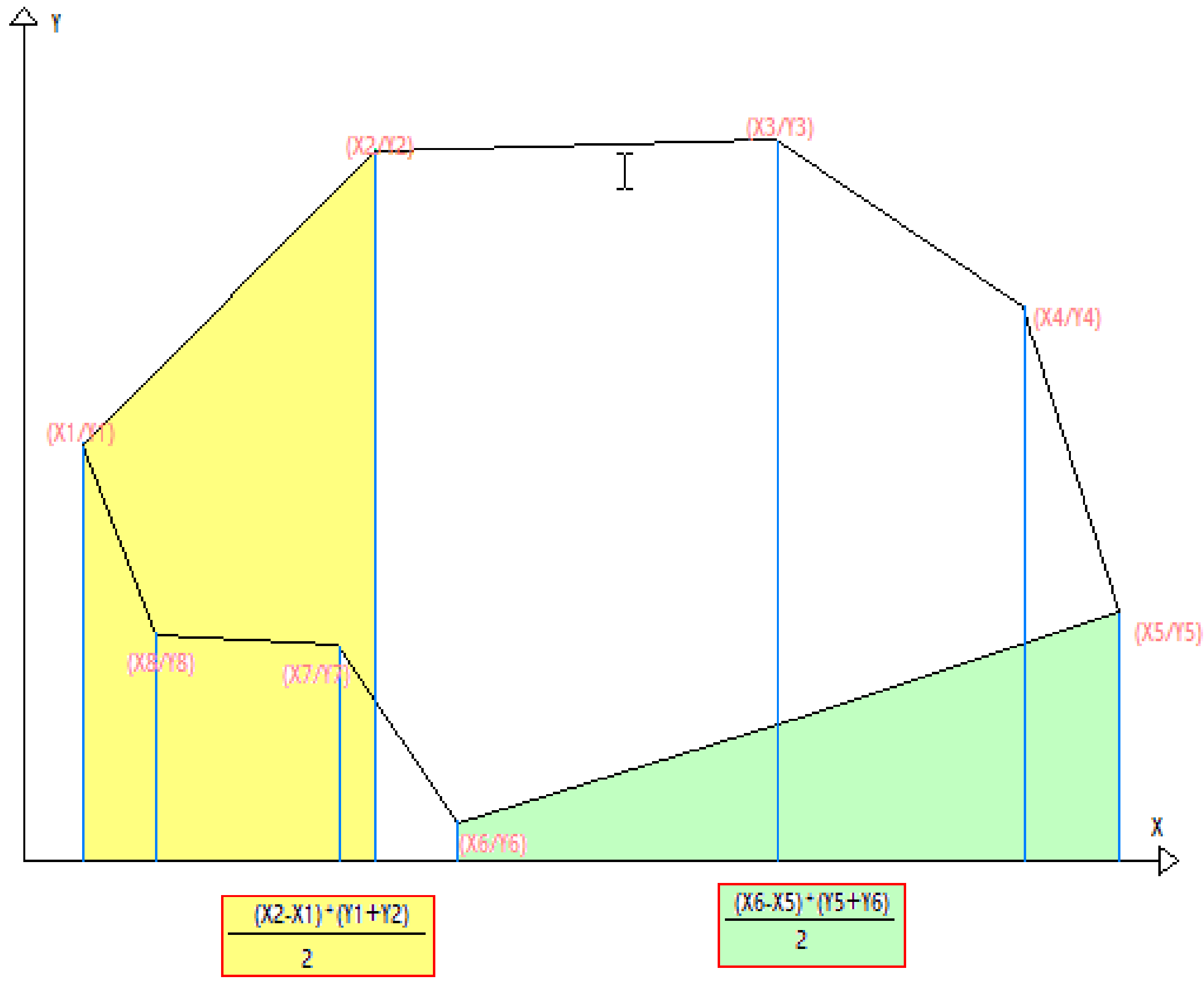


Abb. 6.7: Schülerarbeit

Ermittlung des Flächeninhaltes

- <u>Gauß'sche Vielecksformel</u>



Gauß`schen Vielecksformel:

Dazu wird die Fläche des Sees und die Fläche vom unteren Rand des Sees bis zur x-Achse in Trapeze eingeteilt. (Siehe Skizze)

$$\frac{(x_2-x_1)(y_2+y_1)}{2}+\frac{(x_3-x_2)(y_3+y_2)}{2}+\frac{(x_4-x_3)(y_4+y_3)}{2}+\frac{(x_5-x_4)(y_5+y_4)}{2}+$$

$$\frac{(x_6-x_5)(y_6+y_5)}{2}+\frac{(x_7-x_6)(y_7+y_6)}{2}+\frac{(x_8-x_7)(y_8+y_7)}{2}+\frac{(x_1-x_8)(y_1+y_8)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ (X_2Y_2 + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1Y_1 \ + \ X_3Y_3 + X_3Y_2 - X_2Y_3 - X_2Y_2 \ + \ X_4Y_4 + X_4Y_3 - X_3Y_4 -$$

$$X_3Y_3 \ + \ X_5Y_5 + X_5Y_4 - X_4Y_5 - X_4Y_4 \ + \ X_6Y_6 + X_6Y_5 - X_5Y_6 - X_5Y_5 \ + \ X_7Y_7 + X_7Y_6 -$$

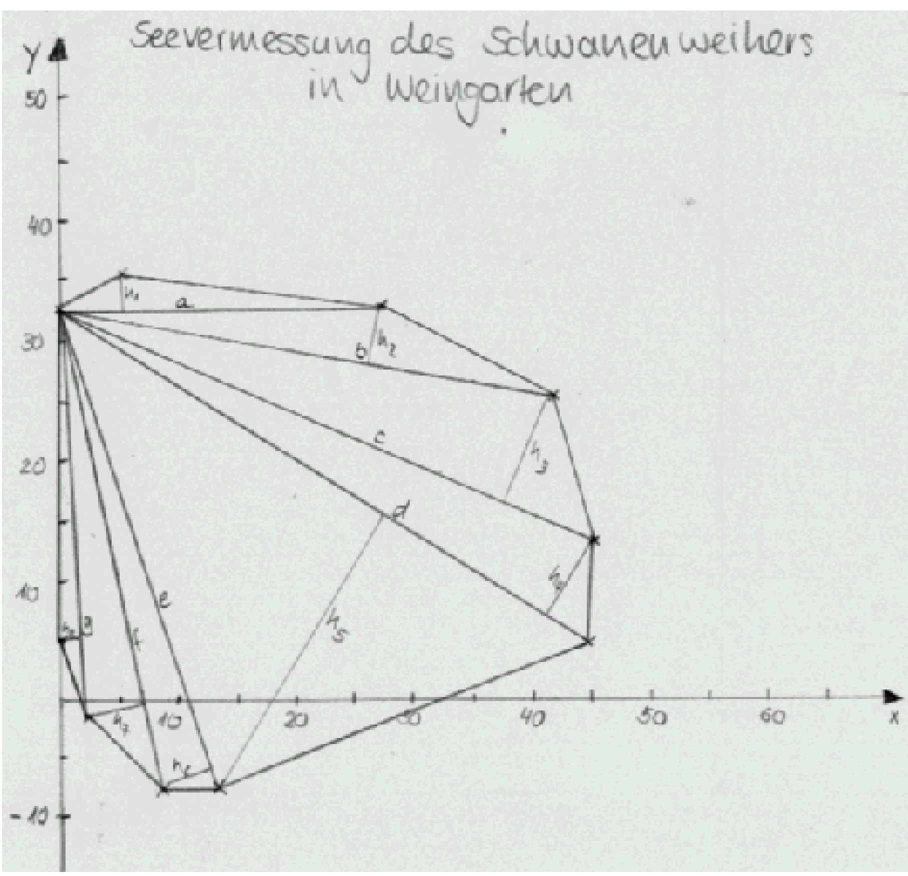
$$X_6Y_7 - X_6Y_6 \ + \ X_8Y_8 + X_8Y_7 - X_7Y_8 - X_7Y_7 \ + \ X_1Y_1 + X_1Y_8 - X_8Y_1 - X_8Y_8$$

$$= \frac{1}{2}\ (X_2Y_1 - X_1Y_2 \ + X_3Y_2 - X_2Y_3 + X_4Y_3 - X_3Y_4 + X_5Y_4 - X_4Y_5 + X_6Y_5 - X_5Y_6\ X_7Y_6 -$$

$$X_6Y_7 + X_8Y_7 - X_7Y_8 + X_1Y_8 - X_8Y_1)$$

$$\boxed{\Rightarrow \ A_{\text{Poly}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_{i+1} - y_{i-1})}$$

- <u>Aufteilung der Seefläche in allgemeine Dreiecke</u>

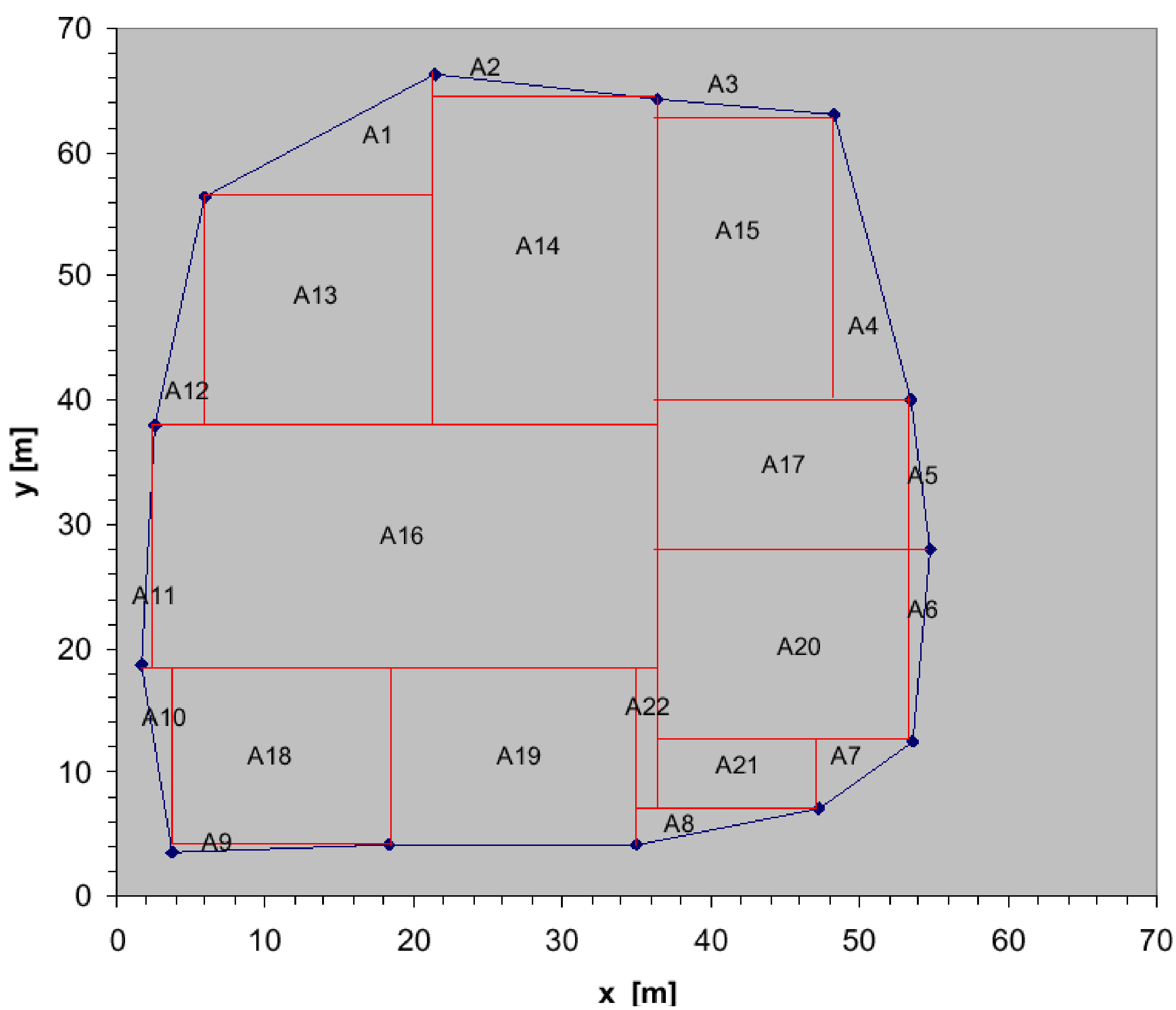


Die notwendigen Angaben zur Flächenberechnung werden aus der Zeichnung durch abmessen entnommen. Dafür muss das Flächenstück realitätsgetreu mit entsprechendem Maßstab abgezeichnet werden.

Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks:

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

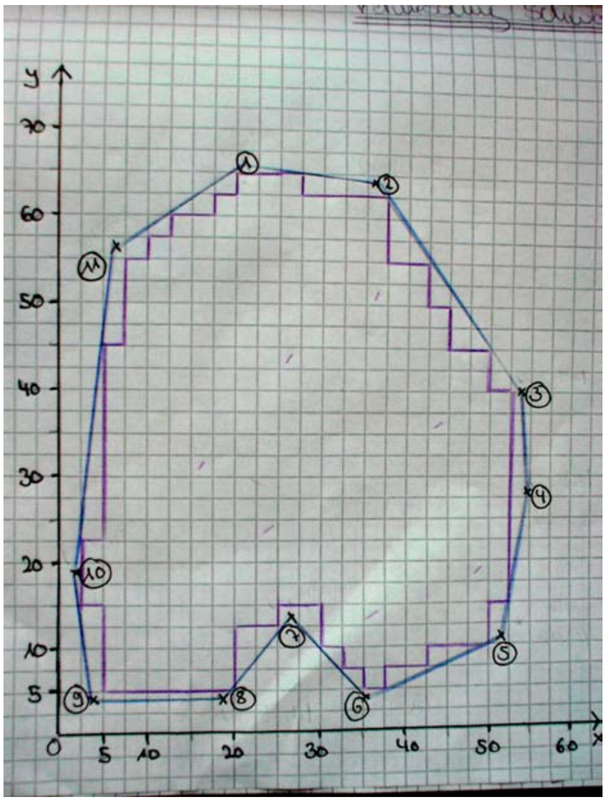
- <u>Aufteilung der Seefläche in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke</u>



Die Fläche des Weihers wird in rechtwinklige Dreieckesflächen und Rechtecksflächen eingeteilt. Diese Aufteilung erfolgt immer parallel oder orthogonal zur x- und y-Achse.

Somit können alle Maße ausgerechnet werden und müssen nicht aus der Zeichnung abgemessen werden.

- <u>Kästchenzählmethode</u>



Bei dieser Methode werden einfach die Kästchen im Polygon abgezählt. Um den Flächeninhalt bestimmen zu können, muss umgerechnet werden wie vielen Quadratmetern ein Kästchen in Wirklichkeit entspricht.
Ein großer Nachteil dieser Methode ist die relativ hohe Ungenauigkeit des Ergebnisses.

- <u>Ermittlung des Flächeninhaltes über das Gewicht des benötigten Pappkarton</u>

Die Fläche des zu vermessenden Objekts maßstabsgetreu auf einen dicken Karton (die Angabe Gramm pro Quadratmeter [g/m^2] muss bekannt sein) gezeichnet und ausgeschnitten und auf eine sehr genaue Waage (z.B. Briefwaage) gelegt. Nun kann über das Gewicht des ausgeschnittenen Polygons der Flächeninhalt berechnet werden.

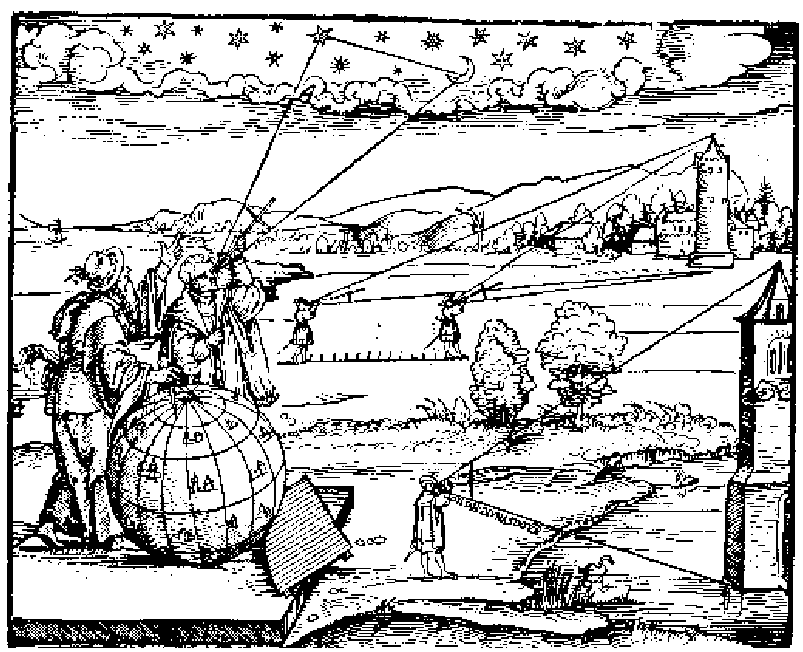
6.5 Bezug zum Bildungsplan

Der Winkelspiegel kann in Klasse 7 und 8 eingesetzt werden. Er bietet sich als Gerät zur Bestimmung von Flächeninhalten an: **2. Leitidee Messen** *- die Prinzipien der längen- und Winkelmessung sowie der Flächen- und Volumenberechnung nutzen.*
Voraussetzung, den Winkelspiegel einsetzen zu können, ist es, dass die SchülerInnen funktionale Zusammenhänge (Koordinatensysteme) beherrschen. Außerdem wäre es sinnvoll Aufgaben zur Berechnung von Flächeninhalten mit dem Winkelspiegel in Zusammenarbeit mit dem Fach Informatik zu stellen.
Der Winkelspiegel kann ebenfalls in Klasse 9 und 10 in den Mathematikunterricht integriert werden. Im Bildungsplan heißt es: **2. Leitidee Messen** *- gezielte Messungen vornehmen, Maßangaben entnehmen und damit Berechnungen durchführen.* Des weiteren fordert der Bildungsplan: - *Ergebnisse in bezug auf die Situation prüfen*. Hierfür ist eine Messung mit dem Winkelspiegel ideal. Die SchülerInnen haben aus Messwerten und einer Formel eine Fläche berechnet und müssen dann prüfen, ob das Ergebnis realistisch sein kann.

7. Der Jakobstab

7.1 Der geschichtliche Hintergrund

Der Name Jakobstab wird einerseits vom Wanderstab der Jakobspilger, dem er sehr ähnlich sieht, und andererseits vom Sternbild Orion, das im Mittelalter mit dem Pilgerstab des Jacobus Major verglichen wurde, abgeleitet und danach benannt. Die erste schriftliche Beschreibung wurde 1342 von dem jüdischen Gelehrten Levi ben Gerson aus Bagnolos (Katalonien) beschrieben. Der Jakobstab war ein frühes astronomisches Instrument zur Winkelmessung zwischen zwei Punkten, entweder zwischen zwei Gestirnen oder zwischen Horizont und einem Gestirn. Man benutzte ihn vor allem zur Bestimmung der graphischen Breite durch Messen der Höhenwinkel von Fixsternen (Polarsternen) über dem nautischen Horizont, weiter konnte man mit ihm auch die Winkel zwischen terrestrischen Zielen und von Turmhöhen verwenden (wichtig für die küstennahe Navigation). Paolo Toscanelli benutzte den Jakobsstab 1433 zur Ortsbestimmung eines Kometen.



In der Seefahrt wurde er erstmals im 15 Jahrhundert bei der portugiesischen Seefahrt erwähnt und erst im 16. Jahrhundert setzte er sich dort durch. Dies lag daran, dass die Navigatoren mit ungeschützten Augen in die Sonne und auf den Horizont schauen mussten, deshalb gebrauchte man ihn später rückwärts, was bedeutet, dass man den Schattenwurf der Sonne auf den Stab ausnutzte. Abgelöst wurde der Jacobsstab dann im 18. Jahrhundert durch den Spiegeloktanten von J. Hadley.

7.2 Der Bau des Jakobstabes

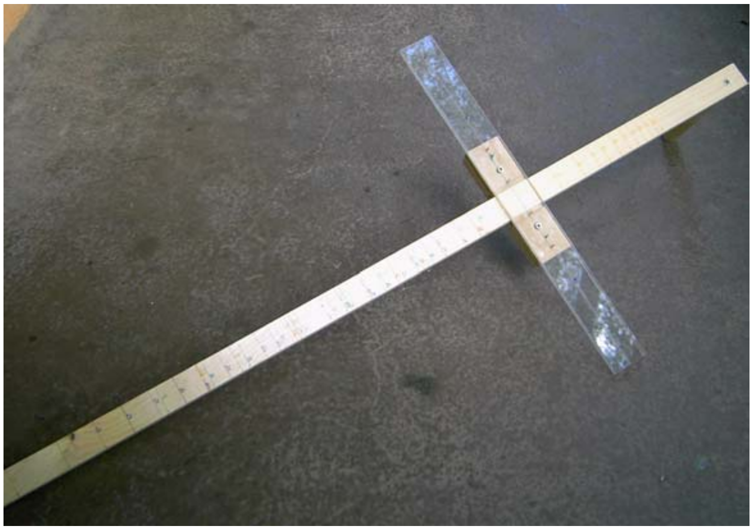


Abb.7.1: Jakobstab mit Plexiglas als Querstab

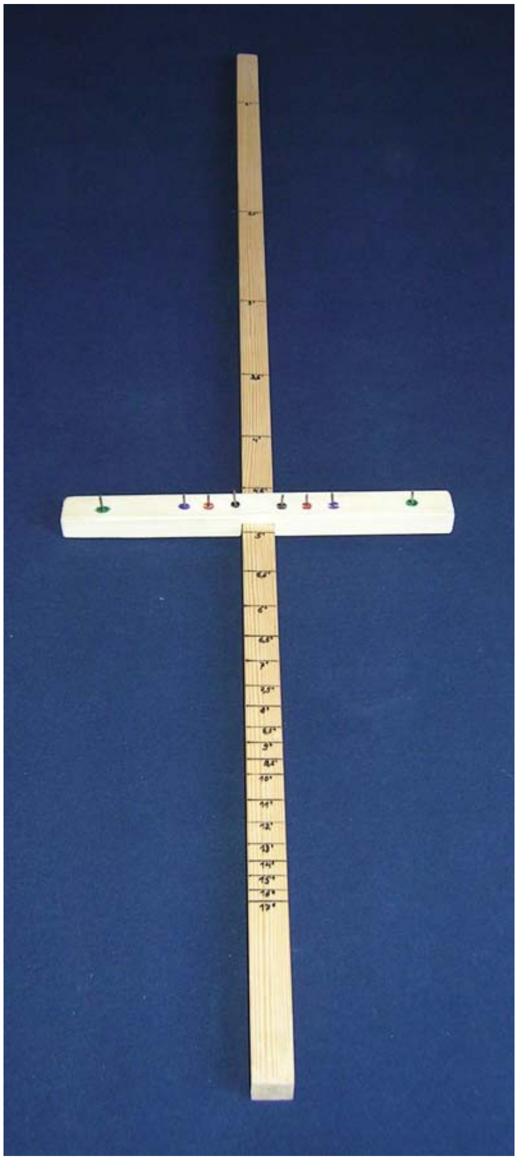


Abb. 7.2: Jakobstab mit Holzquerstab

7.2.1 Material für Jakobstab mit Plexiglas als Querstab

- Längsstab / Holz: 1000mm x 30 mm x 12mm
- Querstab / Holz: a) langer Stab: 136mm x 39mm x 10mm
- b) kurzer Stab: 55mm x 39mm x 12mm (benötigt man 2x)
- c) Plexiglas: 500mm x 39mm x 6mm
- 10 Nägelchen
- Rundstab / Holz: Länge 150mm; Durchmesser 20mm
- zusätzliches Baumaterial: Holzleim

7.2.2 Herstellung

- Zuerst wird im Mittelpunkt des Rundstabes ein Loch gebohrt, anschließend am Ende des Längsstabes auf der Rückseite. Danach wir der Rundstab mit dem Längsstab durch eine Schraube verbunden.

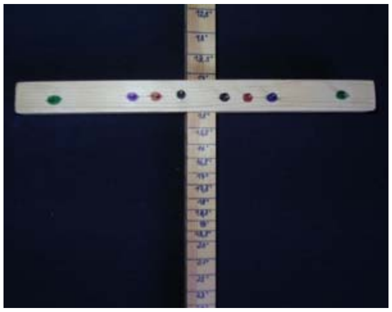
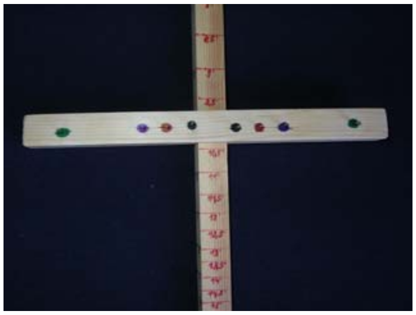
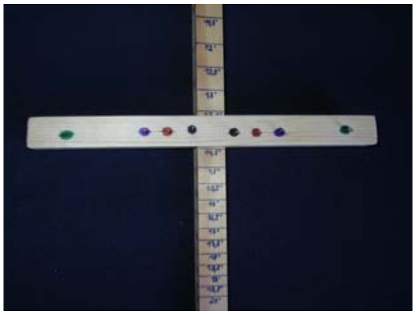
- Anschließend wird der Querstab gebaut. Indem man a) den langen Stab nimmt, darauf dann b) die beiden kurzen Stäbe rechts und links mit Hilfe eines Holzleimes verleimt. In der Mitte muss eine Art Schiene laufen, die der Breite des Längsstabes entspricht.
- Die Mitte des Plexiglases wird mit Hilfe eines Bleistiftes angezeichnet, von der werden dann in gleichen Abständen nach rechts und links Löcher für die Nägel gebohrt, die anschließend, mit der Spitze nach oben, durch die Löcher geführt werden.
- Das Plexiglas wird nun mittig auf den Querstab mit Hilfe von Schrauben befestigt.
- Die Skalierung des Jakobstabes erfolgt durch die Angabe der Visierbreite, indem man den Abstand der Nägelchen nach rechts und links von der Mitte aus misst. Die Ergebnisse werden in eine Excel-Tabelle eingegeben um die Winkelwerte zu berechnen, oder man gibt die Tabelle einfach vor.

Tabelle Jakobstab

Formel d=s/(2*tan(alpha/2))

Visierbreite	**s=**	**0,02**	**0,04**	**0,06**	**0,08**	**0,1**	**0,12**	**0,14**
Sehwinkel	**Alpha**	d in Meter	d in Meter	d in Meter	d in Meter	d in Meter	d in Meter	d in Meter
	1°	1,146	2,293	3,439	4,586	5,732	6,879	8,025
	1,5°	0,764	1,529	2,293	3,057	3,821	4,586	5,350
	2°	0,573	1,146	1,720	2,293	2,866	3,439	4,012
	2,5°	0,459	0,917	1,376	1,834	2,293	2,751	3,210
	3°	0,382	0,764	1,146	1,528	1,910	2,292	2,675
	3,5°	0,327	0,655	0,982	1,310	1,637	1,965	2,292
	4°	0,287	0,573	0,860	1,146	1,433	1,719	2,006
	4,5°	0,255	0,509	0,764	1,019	1,273	1,528	1,783
	5°	0,229	0,458	0,687	0,917	1,146	1,375	1,604
	6°	0,191	0,382	0,573	0,764	0,955	1,145	1,336
	7°	0,164	0,327	0,491	0,654	0,818	0,981	1,145
	8°	0,143	0,286	0,429	0,572	0,715	0,858	1,002
	9°	0,127	0,254	0,381	0,509	0,636	0,763	0,890
	10°	0,114	0,229	0,343	0,457	0,572	0,686	0,801
	11°	0,104	0,208	0,312	0,416	0,520	0,623	0,727
	12°	0,095	0,190	0,286	0,381	0,476	0,571	0,666
	13°	0,088	0,176	0,263	0,351	0,439	0,527	0,615
	14°	0,081	0,163	0,244	0,326	0,407	0,489	0,570
	15°	0,076	0,152	0,228	0,304	0,380	0,456	0,532
	16°	0,071	0,142	0,214	0,285	0,356	0,427	0,498
	17°	0,067	0,134	0,201	0,268	0,335	0,402	0,469
	18°	0,063	0,126	0,190	0,253	0,316	0,379	0,442
	19°	0,060	0,120	0,179	0,239	0,299	0,359	0,419
	20°	0,057	0,113	0,170	0,227	0,284	0,340	0,397
	21°	0,054	0,108	0,162	0,216	0,270	0,324	0,378

22°	0,051	0,103	0,154	0,206	0,257	0,309	0,360
23°	0,049	0,098	0,148	0,197	0,246	0,295	0,344
24°	0,047	0,094	0,141	0,188	0,235	0,282	0,329
25°	0,045	0,090	0,135	0,181	0,226	0,271	0,316
26°	0,043	0,087	0,130	0,173	0,217	0,260	0,303
27°	0,042	0,083	0,125	0,167	0,208	0,250	0,292
28°	0,040	0,080	0,120	0,161	0,201	0,241	0,281
29°	0,039	0,077	0,116	0,155	0,193	0,232	0,271
30°	0,037	0,075	0,112	0,149	0,187	0,224	0,261
31°	0,036	0,072	0,108	0,144	0,180	0,216	0,253
32°	0,035	0,070	0,105	0,140	0,174	0,209	0,244
33°	0,034	0,068	0,101	0,135	0,169	0,203	0,236
34°	0,033	0,065	0,098	0,131	0,164	0,196	0,229
35°	0,032	0,063	0,095	0,127	0,159	0,190	0,222
36°	0,031	0,062	0,092	0,123	0,154	0,185	0,216
37°	0,030	0,060	0,090	0,120	0,150	0,179	0,209
38°	0,029	0,058	0,087	0,116	0,145	0,174	0,203
39°	0,028	0,057	0,085	0,113	0,141	0,170	0,198
40°	0,027	0,055	0,082	0,110	0,137	0,165	0,192
41°	0,027	0,054	0,080	0,107	0,134	0,161	0,187
42°	0,026	0,052	0,078	0,104	0,130	0,156	0,182
43°	0,025	0,051	0,076	0,102	0,127	0,152	0,178
44°	0,025	0,050	0,074	0,099	0,124	0,149	0,173
45°	0,024	0,048	0,072	0,097	0,121	0,145	0,169
46°	0,024	0,047	0,071	0,094	0,118	0,141	0,165
47°	0,023	0,046	0,069	0,092	0,115	0,138	0,161
48°	0,022	0,045	0,067	0,090	0,112	0,135	0,157
49°	0,022	0,044	0,066	0,088	0,110	0,132	0,154
50°	0,021	0,043	0,064	0,086	0,107	0,129	0,150
51°	0,021	0,042	0,063	0,084	0,105	0,126	0,147
52°	0,021	0,041	0,062	0,082	0,103	0,123	0,144
53°	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120	0,140
54°	0,020	0,039	0,059	0,079	0,098	0,118	0,137
55°	0,019	0,038	0,058	0,077	0,096	0,115	0,135
56°	0,019	0,038	0,056	0,075	0,094	0,113	0,132
57°	0,018	0,037	0,055	0,074	0,092	0,111	0,129
58°	0,018	0,036	0,054	0,072	0,090	0,108	0,126
59°	0,018	0,035	0,053	0,071	0,088	0,106	0,124
60°	0,017	0,035	0,052	0,069	0,087	0,104	0,121

Die Skalierungen auf dem Längsstab können auch an verschiedene auswechselbare Stäbe angebracht werden. Dies steigert die Übersicht.

7.3 Das Prinzip des Jakobstabes

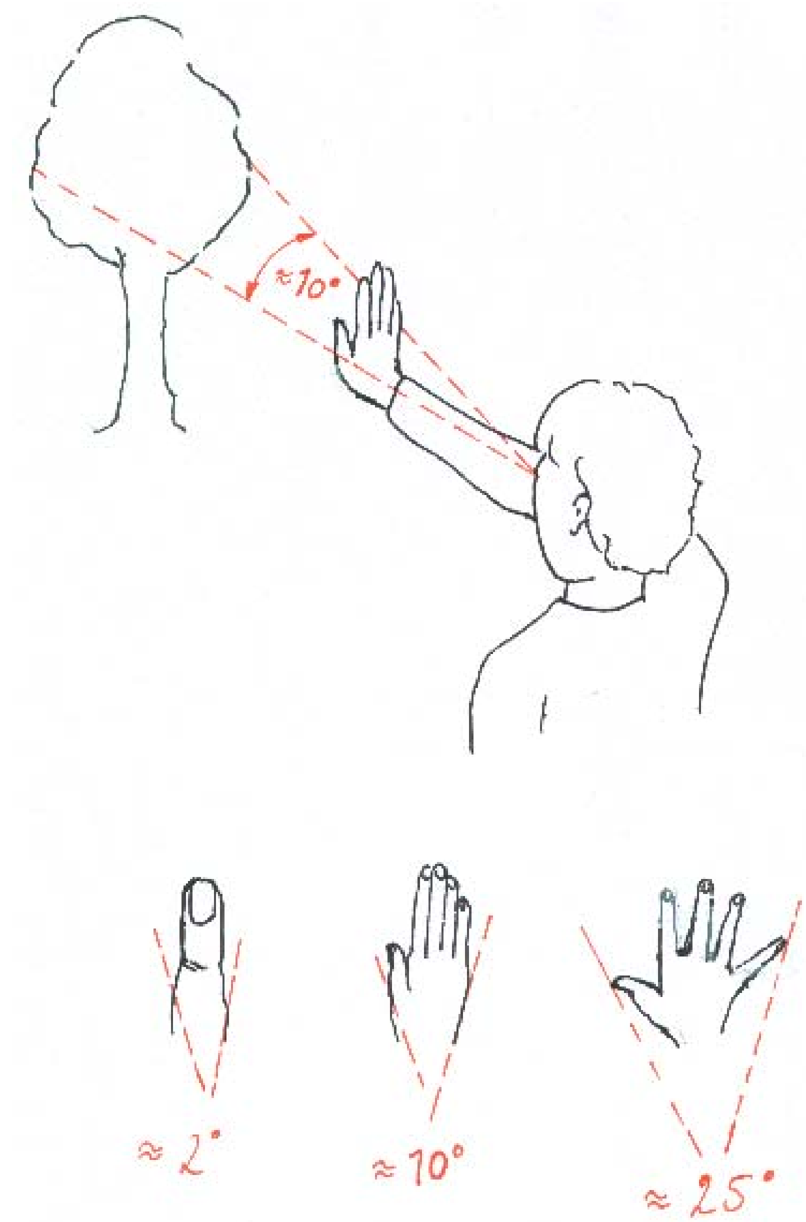


Abb.7.3: Winkel messen mit dem ausgestreckten Arm

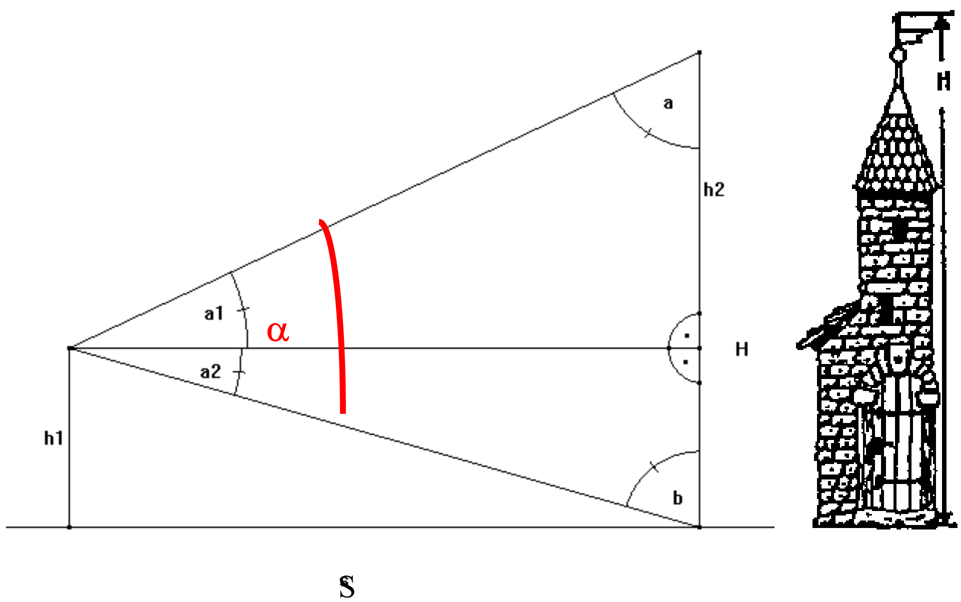
Es werden die Außenkanten des zu vermessenden Objektes unter einem bekannten Winkel anvisiert. Siehe Abb. 7.3
Die Breite (oder Höhe) des zu vermessenden Gegenstandes kann bestimmt werden, wenn die Entfernung zwischen dem Objekt und dem Vermesser bekannt ist.

7.4 Die Funktion des Jakobstabes

Der Jakobstab besteht aus den zwei Stäben, wobei der Längsstab mit der Skalierung fest und der Querstab beweglich ist. Der Vermesser stellt sich an einen Punkt, so dass er die gesamte Höhe (oder Breite) des zu vermessenden Gegenstandes mit dem Visier des Jakobstabes (das auf dem Querstab befestigt ist) erfassen kann.
Dabei sollte er folgendermaßen vorgehen.

- Zuerst wird der Jakobstab an das Auge gehalten
- Um den Winkel zu ermitteln, unter dem man das Objekt sieht, peilt man den zu erfassenden Gegenstand mit dem Visier an, dabei wird der Querstab so lange hin und her bewegt, bis der Gegenstand von beiden Enden des Visiers bedeckt wird; dabei kann sich die Person vorwärts oder rückwärts bewegen, bis dies erreicht ist.
- Ist der Winkel ermittelt wird noch der Abstand von Gegenstand und Vermesser gemessen.

7.5 Der mathematische Hintergrund



$$\tan \alpha_1 = \frac{h_1}{S} \qquad \ldots(\text{I})$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{h2}{s} \qquad \ldots(\text{II})$$

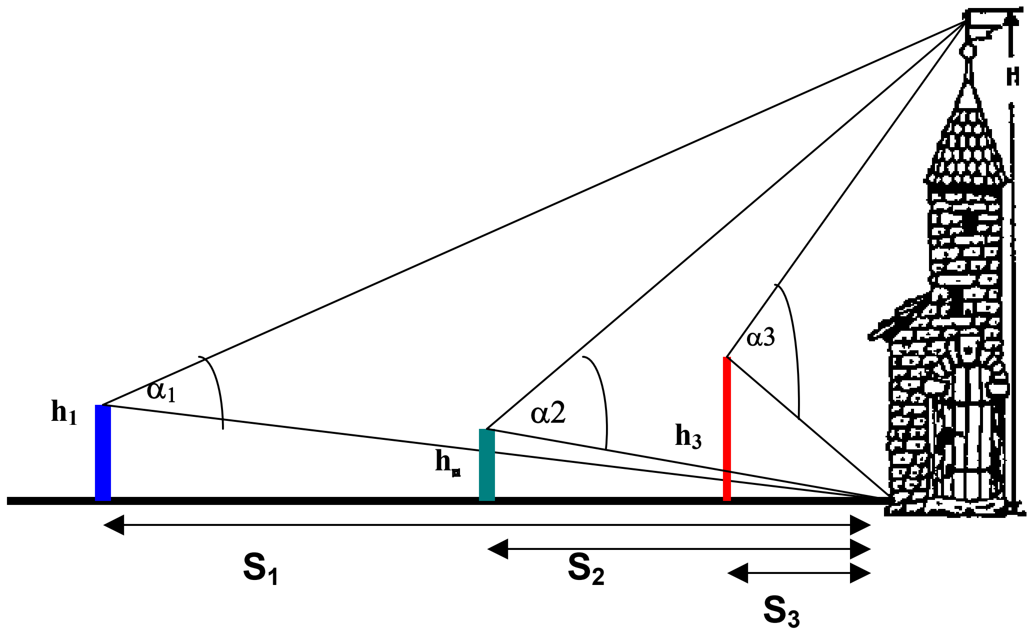
1) α_1 kann berechnet werden mit **(I)**

2) α_2 berechnen : $\alpha - \alpha_1$

3) $\mathbf{h_2}$ berechnen mit **(II)**

4) Nun wird die Gesamthöhe mit $\mathbf{h_1 + h_2}$ ermittelt

7.6 Das Messprotokoll



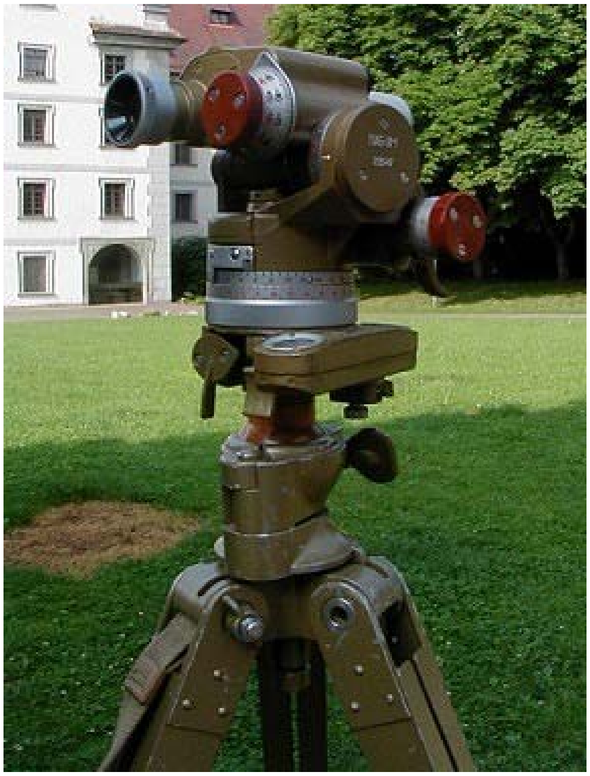
	Name:	S:	h:	α:
1. Messung				
2.Messung				
3.Messung				

<u>Die Messfehler</u>

Warum können Messfehler auftreten?

- Der Abstand vom zu messenden Gegenstand und dem Standpunkt des Vermessers wurde nicht genau abgelesen.
- Der Vermesser konnte die richtige Anvisierung des Gegenstandes nicht durchführen, da die Sonne blendete.

8. Die Bussole



Die im Hauptseminar verwendete Bussole (siehe Abb. 8.1) ist ein professionelles, russischer Messgerät und stammt aus den Restbeständen der Roten Armee. Es dient zum Messen von Winkeln. Aus Gründen der Verschlüsselung wurde eine andere Gradeinteilung verwendet. Die Bussole dient der Winkelmessung von Horizontal- und Vertikalwinkeln.

A
bb. 8.1: Die Bussole

8.1 Der Aufbau der Bussole

8.1.1 Das Aufstellen

(a) Die Bussole wir nur in dem dafür vorgesehenen Koffer/Behälter transportiert.

(b) Vor dem Aufstellen wird geprüft, ob auch alle Schrauben des Stativs fest sind.

(c) Zum Aufstellen des Stativs wird zunächst ein Schnurlot in einen Haken des Stativs gehängt. Das Stativ wird nun so aufgestellt, dass das Schnurlot innerhalb von 2 cm über dem Vermessungspunkt einpendelt, von dem aus gemessen werden soll. Die Stativbeine sollten gleichmäßig fest in den Boden eingetreten werden.

(d) Die Bussole wird an ihrem Rundkopf zunächst locker auf dem Stativkopf befestigt.

Abb.8.2 Befestigen der Bussole auf dem Stativ

8.1.2 Das Horizontrieren

Zuerst wird die runde Dosenlibelle der Bussole durch Verkürzen und Verlängern der Stativbeine ungefähr eingespielt. Zum genauen Horizontrieren wird der Bussolenkopf solange in verschiedene Richtungen geneigt bis die Luftblase in der Mitte einspielt. Danach wird die Schraube, die den Bussolenkopf am Stativ hält, fest angezogen.

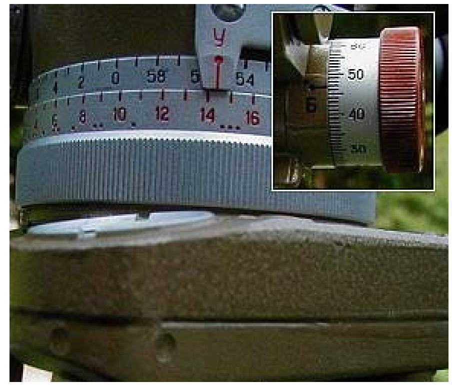
8.1.3 Das Ausrichten

Nun wird das Fernrohr gegen einen hellen Hintergrund gerichtet und das Fernrohrokular gedreht, bis das Fadenkreuz scharf und tiefschwarz erscheint. Das Fadenkreuz auf die Mitte der Messlatte bzw. des Zielpunktes ausrichten.

8.1.4 Die Winkelmessung

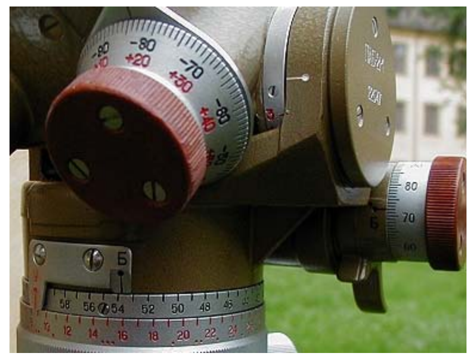
Vor der Messung wird das Fadenkreuz des Fernrohres mit der geriffelten Schraube am Okular scharf gestellt. Der Protokollant der Messgruppe fertigt eine Skizze mit dem Standpunkt und den anzupeilenden Punkten mit den geschätzten Winkeln an. Vom Standpunkt aus wird der zu vermessende Punkt angepeilt und vermessen. Der Vertikalstrich des Fadenkreuzes wird dabei auf die Mitte des zu vermessenden Objektes (Fluchtstab, Baumstamm, Hausecke,...) gerichtet und der Ring mit der Gradeinteilung auf „Null“ gestellt.

Anschließen wird der zweite Fluchtstab angepeilt. Jetzt kann der Winkel zwischen den beiden angepeilten Punkten an der Bussole abgelesen werden.



8.1.5 Die Gradeinteilung der Bussole

1° auf dem Gradring der Bussole entspricht 6° bei der 360° - Vollkreiseinteilung. Für die Feineinstellung befindet sich auf dem Einstellrad für die Vertikal- und Horizontalwinkel eine Gradeinteilung mit 100 Einheiten. Bei der 360° - Einteilung entspricht eine Einheit 6/100°.

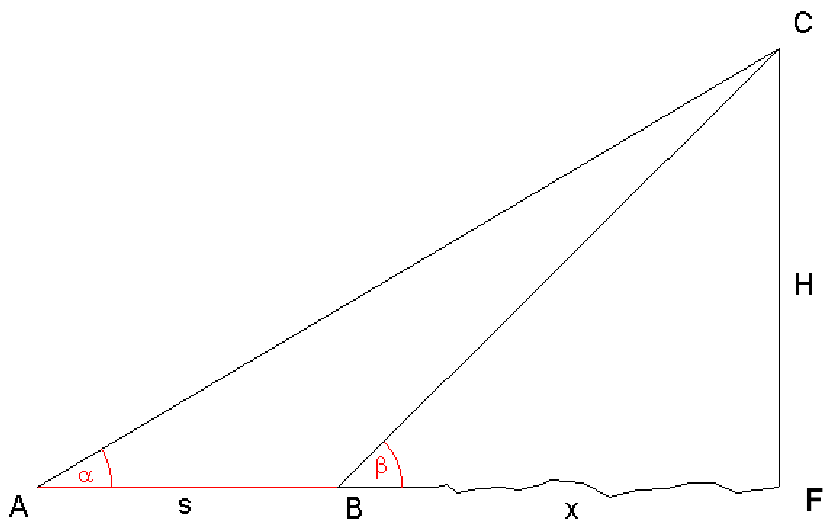


8.2 Vermessen mit der Bussole

8.2.1 Die Höhenvermessung

Der zu messende Turm ist nicht unmittelbar begehbar. Die Strecke x ist ein Fluss, ein See, ein Dickicht, ... und stellt für die Geometer ein Hindernis dar. Es kann zum Beispiel keine Schattenmethode angewandt werden, da das Maßband nirgends ausgelegt werden kann. Es wird aus diesem Grund hinter dem Hindernis eine Standlinie [AB] festgelegt und ihre Länge gemessen. Es wird danach mit der Bussole von Punkt A und von Punkt B aus die Spitze des Turmes (Turmkreuz der Basilika) anvisiert und die Winkel α und β ermittelt. In der 7. Klasse wird das Dreieck ABC maßstabsgetreu gezeichnet (WSW). Die fragliche Höhe wird abgelesen und umgerechnet. Da in der 10. Klasse die Trigonometrie behandelt wird, ist hier auch eine trigonometrische Lösung möglich.

α, β und s können gemessen werden. Unbekannt ist die Strecke BF.



Aus der Skizze ergibt sich: $$\frac{H}{s+x} = \tan\alpha \Rightarrow s + x = \frac{H}{\tan\alpha}$$

$$\frac{H}{x} = \tan\beta \Rightarrow x = \frac{H}{\tan\beta}$$

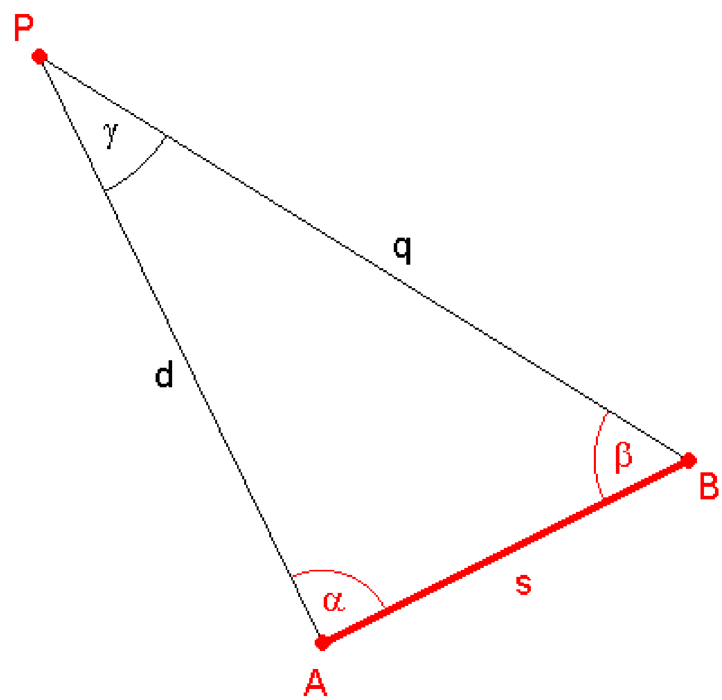
Gleichgesetzt:
$$\frac{H}{\tan\alpha} = s + \frac{H}{\tan\beta}$$

$$s = H \cdot \left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right)$$

$$H = \frac{s}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}}$$

$$H = s \cdot \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

8.2.2 Entfernung zu einem bestimmten Punkt, der völlig unzugänglich ist



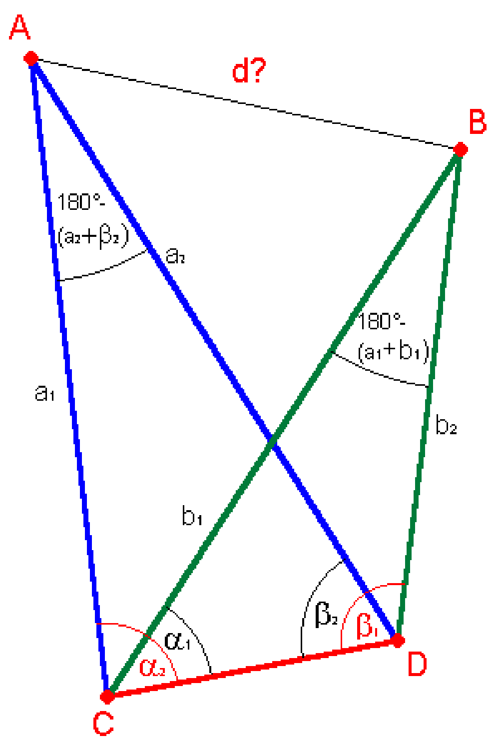
Es werden wieder zwei Punkte A und B als Endpunkte einer Standlinie, deren Länge gemessen wird, bestimmt. Zunächst wird der Punkt P von Punkt A aus anvisiert und der Winkel gemessen, anschließend auch noch von Punkt B aus. Die Strecke s und die Winkel α und β sind nun bekannt, der Winkel γ kann über die Winkelsumme im Dreieck errechnet werden. Somit können die SuS der Klasse 7 das Dreieck ABP maßstabsgetreu zeichnen (WSW). Aus der Zeichnung können sie jetzt die Entfernungen d und q zu Punkt P ablesen und umrechnen. Für die SuS der Klasse 10 gibt es eine trigonometrische Lösung:

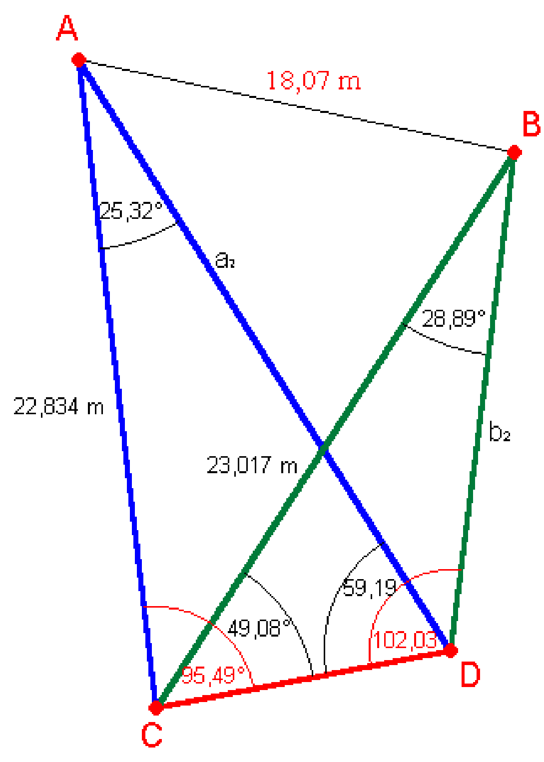
$$\frac{s}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\beta} = \frac{q}{\sin\alpha}$$

$$d = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot s \qquad oder \qquad d = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot q$$

8.2.3 Messung der Entfernung zweier Orte A und B, die so gelegen sind, dass man zu keinem von ihnen gelangen kann

In diesem Fall geht es um Entfernung $\overline{AB}$. Wiederum wählt man zwei Punkte C und D als Endpunkte einer Standlinie. Die Länge der Standlinie wird mit dem Maßband gemessen. Nun visiert man von C aus A, B und D an und der Protokollant zeichnet die entsprechenden Linien. Dann wechselt man nach Punkt D, visiert C, A und auch noch B an und zeichnet die Linien. Es entsteht folgende Figur:





Berechung der Entfernungen a_1 und b_1:

$$a_1 = \frac{\sin \beta_2}{\sin(180° - (\alpha_2 + \beta_2))} \cdot s$$

$$b_1 = \frac{\sin \beta_1}{\sin(180° - (\alpha_1 + \beta_1))} \cdot s$$

$$a_1 = \frac{\sin 59{,}19°}{\sin(180° - (95{,}49° + 59{,}19°))} \cdot 11{,}37\,m$$

$$b_1 = \frac{\sin 102{,}3°}{\sin(180° - (49{,}08° + 102{,}03°)} \cdot 11{,}37\,m$$

$$a_1 = 22{,}834\,m$$

$$b_1 = 23{,}017\,m$$

Zur Berechung der Entfernung $\overline{AB}$ wird der Kosinussatz benutzt, der den SuS der 10. Klasse ebenfalls bekannt ist:

$$d^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$d^2 = (22{,}834\,m)^2 + (23{,}017\,m)^2 - 2 \cdot 22{,}834\,m \cdot 23{,}017\,m \cdot \cos(95{,}49° - 49{,}08°)$$

$$d^2 = 326{,}418\,m^2$$

$$d = 18{,}07\,m$$

8.3 Bezug zum Bildungsplan

Die Messung mit der Bussole ist auch der Lehrplaneinheit 3 „Dreiecke“ im Bildungsplan der Realschule von 1994, Mathematik Klasse 7 (S. 176) zuzuordnen.

Klasse 7: Kenntnisse über Dreiecke und Dreieckskonstruktionen;
Kongruenzsätze durch Zeichnen und Vergleichen erfahren.

Die Bussole kann auch in der Lehrplaneinheit 2 „Trigonometrie“ (Bildungsplan der Realschule von 3/1994) der 10. Klasse eingesetzt werden.

Klasse 10: Definition von sin α, cos α und tan α im rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis; Kosinussatz

Im Bildungsplan für die Realschule (3/2004) ist die Messung mit der Bussole wiederum der Leitidee „Messen“ in Klasse 8 (S. 63) und 10 (S.65) zuzuordnen. Die SuS sollen in Klasse 10 Streckenlängen in der Ebene und im Raum mit trigonometrischen Funktionen und Ähnlichkeitsbeziehungen berechnen.

9. Das GPS

9.1 Die Geschichte des GPS

Das NAVSTAR GPS (**Nav**igation **S**atellite using **T**ime **A**nd **R**ange **G**lobal **P**ositioning **S**ystem) wurde ab 1973 vom Joint Program Office, welches zum US-amerikanischen Verteidigungsministerium gehört, entwickelt.

Das System sollte hohe Anforderungen erfüllen:

- dreidimensionale Positionsbestimmung (Ortung) in Echtzeit von ruhenden und bewegten Objekten auf der Erde und im Erdnahen Raum
- Bestimmung der Geschwindigkeit bewegter Objekte
- Lieferung von Zeitinformation
- Unbegrenzte Anzahl gleichzeitig tätiger Nutzer
- Unabhängigkeit von meteorologischen Verhältnissen
- Hohe Sicherheit gegenüber zufälligen oder gewollten Störungen

(Quelle: Benjamin Biedermann; Facharbeit aus der Mathematik; Global Positioning System (GPS); 2000)

Der erste Satellit wurde 1977 ins All geschossen. 1983 war das System einsatzbereit. Heute umkreisen 24 GPS Satelliten die Erde, was sicherstellt, dass immer mindestens vier Satelliten gleichzeitig geortet werden können.
Bis zum Jahr 2000 störten die Amerikaner absichtlich das Signal, so dass es für die zivile (oder feindliche Nutzung) nicht seht exakt war. Heute hat das zivile GPS eine Genauigkeit von ca. 20 Metern, das militärische von einigen Zentimetern.
Etwa zur gleichen Zeit arbeitete auch das Verteidigungsministerium der Sowjetunion an einem ähnlichen System, dem Globalnaya Navigationnaya Sputnikovaya Systema oder auch Global Navigation Satellite System (GLONASS). Obwohl die Systeme als nahezu gleichwertig zu betrachten sind, hat sich die amerikanische Version durchgesetzt.

9.2 Der Aufbau des GPS

Das Global Positioning System lässt sich in drei Hauptsegmente untergliedern.

a) Das Weltraumsegment (Satelliten)
b) Das Kontrollsegment (Kontrollstationen)
c) Das Benutzersegment (GPS-Empfänger)

a) Das Weltraumsegment

Das GPS orientiert sich seit 1993 an 24 Satelliten. Es sind fünf unterschiedliche technische Modelle (z.B. Bild1, Bild2) im Einsatz. Sie haben meistens stabförmige Antennen und auffallend große Flügel, welche sie zur Gewinnung von Solarenergie benötigen. Durch das komplette technische Equipment können sie problemlos ein Gewicht von über 1500 kg erreichen.

Es befinden sich jeweils vier GPS-Satelliten auf einer Umlaufbahn, wobei insgesamt sechs solcher Satellitenbahnen um die Erde verlaufen (Bild 3). Die Bahnen (ca. 20200 km über der Erdoberfläche) sind 55° gegen den Äquator geneigt und in der Äquatorebene 60° gegen einander versetzt. Für eine Erdumrundung benötigt ein solcher Trabant ca. 12 Stunden.

Bild1: GPS-Block IIF Satellit

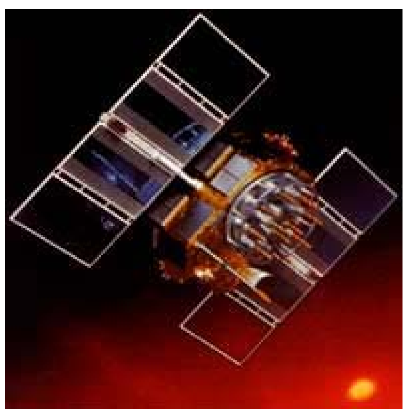


Bild2: GPS-Block IIA Satellit

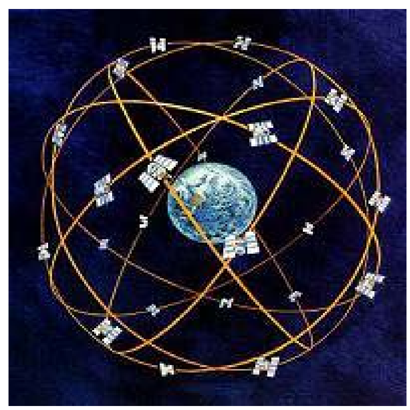


Bild 3: Satellitenbahnen

b) Das Kontrollsegment:

Die Bodenstationen des GPS werden vollständig von der US-Armee kontrolliert und gewartet. Die Aufgabe der vier Monitorstationen auf Hawaii, den Ascension Islands, Diego Garcia und Kwajalein besteht darin, alle im Sichtbereich befindlichen Satelliten zu verfolgen bzw. zu überwachen. Des weiteren senden sie die Messdaten der

Satellitensignale an die „Master Control Station“ (Schriever Air Force Base, Colorado Springs). Dort können eventuelle Fehlfunktionen schnell festgestellt und die neue Ephemeridendaten (Positionsdaten) berechnet werden. Über die vier Monitorstationen können die neuen Daten dann mit den entsprechenden Kommandos an die Satelliten gesendet werden, welche dann ihre Bahn entsprechend korrigieren.

c) Das Benutzersegment

Das dritte Segment des GPS, sind die Empfängergeräte der Benutzer. Diese empfangen die von den Satelliten ausgesendeten Signale (siehe Punkt 4.1.1.)

Es gibt sehr unterschiedliche Modelle, wobei wir mit dem recht handlichen, nur 90g (mit Batterien) schweren, Garmin Geko 201 gearbeitet haben. Das handyartige GPS-Gerät ist bei einem Listenpreis von ca. 157 € recht günstig und hat nachfolgende Funktionen, welche bei der Vermessung im Gelände sinnvoll sein können.:

Bild 4: Garmin Geko 201

- Koordinatendarstellung als Länge/Breite, UTM, britisches, deutsches (Gauß-Krüger) und benutzerdefinierbares Kartengitter.
- PhaseTrac12™-Empfänger nutzt bis zu 12 Satelliten parallel. Sehr schnelle Akquisition und stabiler Empfang auch bei schwachem Satellitensignal.
- Einhandbedienung, graphisches hintergrundbeleuchtetes und leicht ablesbares Display.
- Wählbare Wegpunktsymbole.
- Speicherkapazität mit 500 Wegpunkte.[13]

[13] http://www.garmin.de/Produktbeschreibungen/index-Geko201.html

9.3 Positionsbestimmung

Stark vereinfacht gesagt sendet jeder Satellit eine Nachricht der Art: "Ich bin Satellit Nr. X, meine Position ist gerade Y und diese Nachricht wurde zum Zeitpunkt Z versandt". Dies ist, wie gesagt, stark vereinfacht, aber es kommt dem Prinzip recht nah. Zusätzlich sendet der Satellit noch Informationen über seine Position (und die der anderen Satelliten). Diese Bahndaten werden vom GPS-Empfänger gespeichert und für spätere Rechnungen verwendet.

Um nun die Position zu bestimmen, vergleicht der GPS-Empfänger die Zeit, zu der das Signal ausgesandt wurde mit der Zeit, zu der das Signal empfangen wurde. Aus dieser Zeitdifferenz kann die Entfernung des Satelliten berechnet werden. Werden nun von weiteren Satelliten Messungen hinzugefügt, so kann die aktuelle Position bestimmt werden. Mit wenigstens drei Satelliten kann der GPS Empfänger seine Position auf der Erdoberfläche bestimmen. Dies wird "2D position fix" (zweidimensionale Positionsbestimmung) genannt. Zweidimensional deshalb, weil der Empfänger davon ausgehen muss, sich direkt auf der Erdoberfläche (also einer rechnerisch zweidimensionalen Fläche) zu befinden. Mit Hilfe von vier oder mehr Satelliten (wie in unserem Fall) kann ein "3D position fix", also die absolute Position im Raum oder eben zusätzlich die Höhe über der Erdoberfläche bestimmt werden.

Vereinfacht liegt also der Positionsbestimmung mit Hilfe von GPS das gleiche Prinzip zugrunde, das man bereits als Kind genutzt hat, um die Entfernung eines Gewitters abzuschätzen. Hierbei wird einfach gezählt, welche Zeitdifferenz zwischen dem Einschlag des Blitzes (im Vergleich zur Schall- ist die Lichtgeschwindigkeit so hoch, dass man die Laufzeit des Lichts vom Einschlagpunkt zum Beobachter nicht berücksichtigen muss) und dem Eintreffen des Donners vergangen ist. Da Schall sich in Luft mit etwa 340 m/s ausbreitet ergibt sich so aus z.B. 3 Sekunden zwischen Blitz und Donner eine Entfernung von etwa 1 Kilometer.

Dabei machen wir allerdings noch keine Positionsbestimmung, sondern nur eine Entfernungsbestimmung. Mit mehreren Entfernungsbestimmungen lässt sich jedoch eine Positionsbestimmung durchführen. Um beim Beispiel mit dem Blitz zu bleiben würde das bedeuten, dass wenn mehrere Leute an unterschiedlichen Positionen, die natürlich bekannt sind, stehen und die Zeit zwischen Blitzeinschlag und Donner messen, diese die Position des Blitzeinschlags bestimmen könnten.

Im Folgenden nun eine Erklärung, wie die Positionsbestimmung beim GPS-System vonstatten geht. Zur Vereinfachung soll zunächst von einer zweidimensionalen Welt ausgegangen werden, da hier die Übersichtlichkeit um "Dimensionen" besser ist und sich das ganze auch vernünftig aufzeichnen lässt. Später kann das gesehene dann leicht in die wahre dreidimensionale Welt übertragen werden.

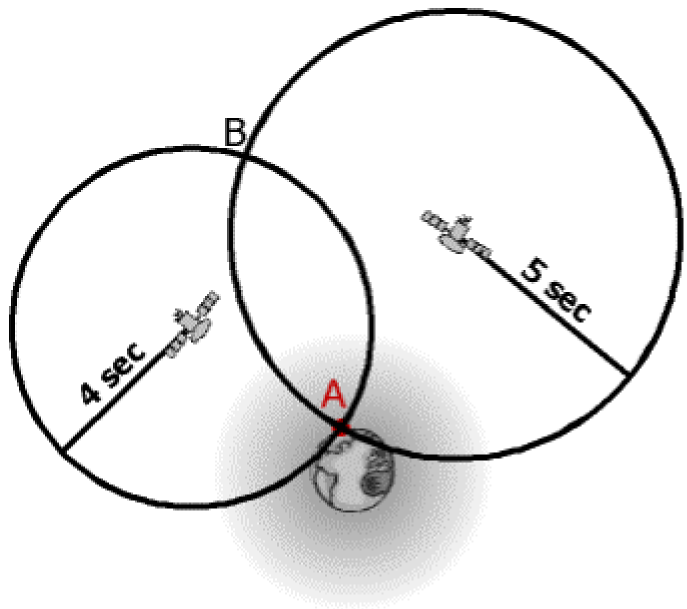


Abb. 9.1: Positionsbestimmung mit zwei Satelliten (2-dimensionale Welt)

In unserem Beispiel haben wir die Zeit, die ein Signal vom ersten der beiden Satelliten bis zu unserem Standpunkt benötigt mit 4 Sekunden bestimmt. (Dieser Wert ist natürlich unrealistisch hoch, aber das macht jetzt nichts. Tatsächlich ist die Laufzeit der Signale vom Satelliten zur Erdoberfläche bei einer Lichtgeschwindigkeit von 299 792 458,0 m/s etwa 0,07 Sekunden, aber das ändert ja nichts am Prinzip.) Wenn wir nur diese Information haben, können wir immerhin schon sagen, dass unsere Position irgendwo auf einem Kreis mit der "Entfernung" 4 Sekunden um den ersten Satelliten sein muss.

Wenn wir das ganze jetzt noch mit der Laufzeit eines zweiten Signals machen, bleiben zwei Schnittpunkte der Kreise als mögliche Positionen (Punkte A und B).

Nun wissen wir ja bereits, dass wir uns wenigstens irgendwo in der Nähe der Erde befinden müssen (Punkt A) und nicht irgendwo weit draußen im Weltraum (Punkt B). Genau genommen haben wir damit unseren dritten "Satelliten" bzw. dritten Kreis, der mit den beiden anderen überlappen muss. Der im Bild grau hinterlegte Bereich ist der

Bereich innerhalb dessen das GPS-System in unserem Beispiel genutzt werden kann. Dieser Bereich ist jedoch sehr groß, da die Satelliten weit von der Erdoberfläche weg sind, so dass sich auch hoch fliegende Flugzeuge innerhalb dieses Bereichs befinden. Damit bleibt also nur ein einziger Punkt übrig, an dem wir uns befinden können und der unsere Position genau bestimmt.

Und für drei Dimensionen brauchen wir jetzt lediglich noch einen dritten Satelliten?

Im Prinzip ja, jedoch gibt es wie immer ein Aber. Das Problem ist, die tatsächliche und exakte Laufzeit der Signale zu kennen. Die Satelliten übermitteln wie gesagt mit jeder Nachricht eine Art Zeitstempel, wann die Nachricht abgesandt wurde. Außerdem wissen wir, dass die Uhren aller Satelliten absolut genau und synchron gehen, schließlich sind Atomuhren an Bord. Das Problem ist jedoch die Uhr unseres GPS Empfängers. Kein GPS-Empfänger hat eine eingebaute Atomuhr, was ihn ungeheuer teuer machen würde. Unsere GPS-Empfänger haben "nur" Quarzuhren und die gegen im Vergleich zu Atomuhren wirklich nicht sehr genau. Aber wie wirkt sich das nun in der Praxis aus?

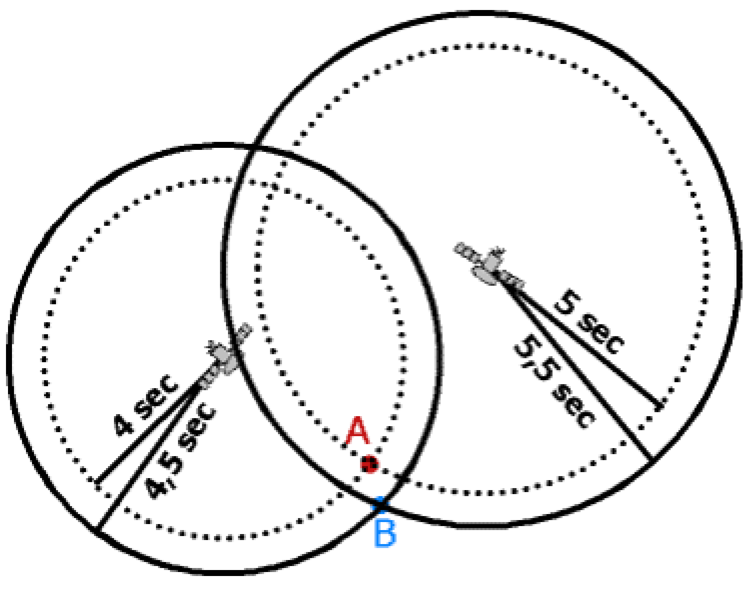


Abb.9.2: 2D Positionsbestimmung mit 2 Satelliten und angenommenem Uhrenfehler

Bleiben wir bei unserem Beispiel und nehmen an, die Uhr in unserem GPS Empfänger geht gegenüber den Uhren der Satelliten eine halbe Sekunde vor. Damit erscheint uns die Laufzeit der Signale von den Satelliten um 0,5 Sekunden länger. Das wiederum führt dann dazu, dass wir glauben am Punkt B anstatt am Punkt A zu sein. Die Kreise die sich in Punkt B schneiden werden im GPS-Wortschatz auch Pseudoranges (Pseudoentfernungen) genannt. Diese werden so lange mit "Pseudo" bezeichnet, bis die Korrektur der Synchronisationsfehler (Bias) der Uhren durchgeführt wurde. Je nachdem, wie genau die Uhr funktioniert, wird die ermittelte Position "mehr oder weniger falsch" sein. Für die Praxis der Navigation mit GPS würde das bedeuten, dass bei den ungeheurer kleinen Signallaufzeiten die ermittelte Position immer viel mehr (als weniger) falsch wäre und damit völlig unbrauchbar würde. Ein Uhrenfehler von 1/100 Sekunde, was die Vorstellungskraft bereits strapaziert, einem jedoch von Auto- und Skirennen heute dennoch durchaus geläufig ist, macht in der GPS-Navigation eine Fehlbestimmung der Position um ca. 3000 km aus. Um eine Positionsbestimmung auf 10 m genau zu erreichen muss die Laufzeit bis auf 0,00000003 Sekunden genau sein. Da keine Atomuhren in GPS-Empfängern zu finden sind, lässt sich das Problem anders auf elegante Weise lösen.

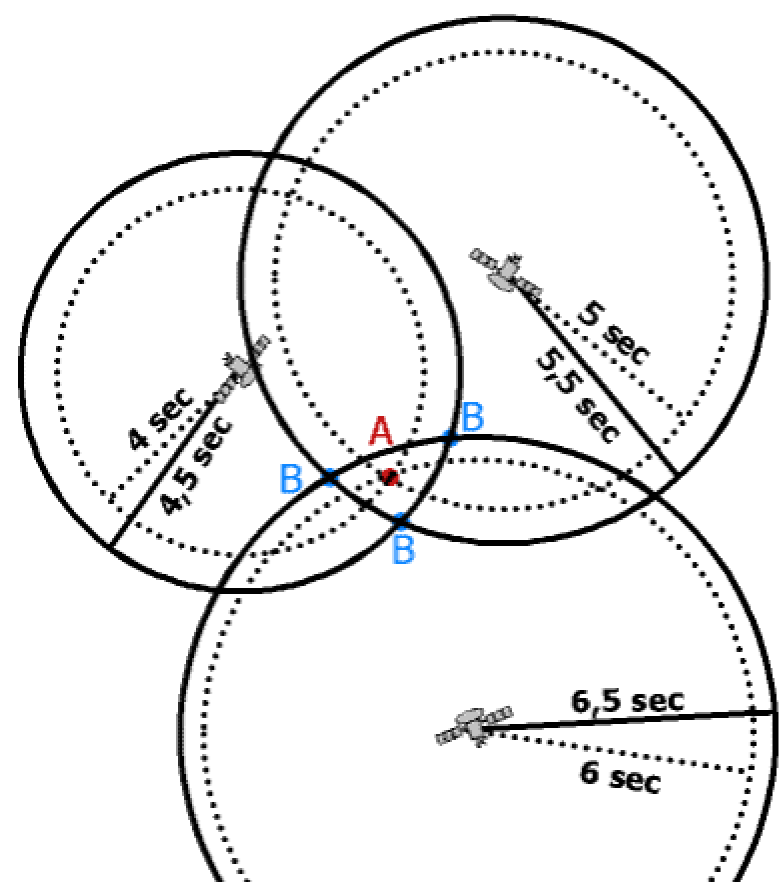


Abb.9.3: 2D Positionsbestimmung mit 3 Satelliten und Korrektur des Uhrenfehlers

Zieht man nämlich noch einen dritten Satelliten hinzu und betrachtet zunächst wieder den Fall, dass die Uhr des Empfängers absolut genau geht, so erhält man wieder eine eindeutige bestimmte Position (Punkt A).

Betrachtet man den gleichen Fall aber unter der Voraussetzung, dass die Empfänger-Uhr eine halbe Sekunde vorgeht, so erhält man keinen eindeutigen Schnittpunkt mehr, sondern drei Schnittpunkte B aus je zwei Kreisen. Der Uhrenfehler fällt also sofort auf. Verschiebt man nun die Zeit der Empfängeruhr solange, bis aus den drei Schnittpunkten B ein Schnittpunkt A wird, so hat man den Uhrenfehler korrigiert und die Empfängeruhr läuft absolut synchron zu den Atomuhren der GPS-Satelliten. Der GPS-

Empfänger wird zur "Atomuhr". Die Entfernungen zu den Satelliten, die als "Pseudoranges" bezeichnet wurden, werden jetzt echte Entfernungsangaben und es wird auch klar, warum sie vorher nur als Pseudoentfernungen bezeichnet wurden.

In unserem Beispiel in der 2-dimensionalen Welt sind also die Signale von drei Satelliten nötig, um eine eindeutige Positionsbestimmung durchzuführen. In der Realität, die eine Dimension mehr hat, braucht man für eine 3D-Positionierung wie bereits erwähnt demnach vier Satelliten.

Warum hört man dann so oft, dass drei Satelliten ausreichen?

Man kann in der Praxis auch mit drei Satelliten eine Ortsbestimmung erhalten, aber nur eine zweidimensionale (2D-fix). Zweidimensional bedeutet, dass sich die so Position auf der Erdoberfläche befinden muss. Der für die Berechnung notwendige vierte Satellit wäre der Erdmittelpunkt und die zu diesem Satelliten bestimmte Entfernung wäre die Entfernung der Erdoberfläche vom Erdmittelpunkt (6360 km). Somit hat man wieder vier gemessene Pseudoentfernungen aus denen die tatsächliche Position bestimmt wird. Aber eben mit der Einschränkung, dass der Empfänger immer davon ausgeht, dass man sich direkt auf der Erdoberfläche befindet. Erdoberfläche meint in diesem Fall das Erdgeoid, also Meereshöhe. Ist das nicht der Fall (ist man z.B. auf einem Berg), kommt es zu Fehlern bei der Bestimmung, da die Laufzeiten von den Satellitensignalen nicht stimmen.

9.4 Die Fehlerquellen von einem GPS

- Satellitengeometrie, wenn alle 4 Satelliten in einer Himmelsrichtung liegen, das heißt alle im Norden oder alle im Süden, kann unter Umständen ein GPS-Gerät nicht einmal eine 2D-Ortung durchführen, denn alle Messungen kommen aus einer Richtung.
- Signalreflektionen, Gebäude, Metallteile oder die Natur können die Funkwellen des GPS-Satelliten wieder reflektieren, was bedeutet, dass das reflektierte Signal länger benötig, um den GPS-Empfänger zu erreichen. Diese längere Laufzeit

rechnet der Empfänger in die Positionsdaten ein und verfälscht dadurch das Ergebnis.

- Atmosphärische Effekte (= Verlängerung der Laufzeit, aufgrund elektrisch geladener Schichten, Ionosphäre und Troposphäre => im Vakuum bewegen sich Radiowellen schneller als ein einer Atmosphäre) sowie die Abweichung der internen Uhr des GPS-Empfängers können die Signale beeinflussen.
- Ungenauigkeit durch Atomuhren

9. 5 Messanleitung

Inhalt:

1. Inbetriebnahme
2. Vorbereitungen treffen
3. Wegpunkte setzen
4. Abstände bestimmen

1. Inbetriebnahme

Das Gerät verfügt über 5 Tasten

|4| |1|

|3|

|5| |2|

1: Ein und Ausschalten

2: Menutaste

3: Bestätigungstaste „OK“

4+5: Taste „Auf“ und „Ab“ zum Auswählen von Unterpunkten des Menus

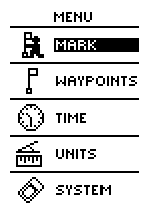
Zum Einschalten des Gerätes kurz die Ein/Aus Taste drücken (1). Das Gerät startet nun und sucht nach Satellitenempfang. Für eine möglichst genaue Positionsangabe sind hierfür 4 verschiedene Satelliten notwendig. Die Suche dauert je nach Position und Wetter zwischen 10 Sekunden und einigen Minuten. In einem Gebäude sind die Signale der Satelliten leider zu schwach und das Gerät wird sich „zu Tode“ suchen.

2. Vorbereitungen treffen

Hat das Gerät nun die 4 benötigten Satelliten gefunden sollte man nun noch vor der eigenen Vermessung die alten Punkte, die im Gerät noch gespeichert sind rauslöschen. Das ist nicht unbedingt notwendig, aber man hat so nur die eigenen Punkte und kommt nicht so schnell durcheinander.

Wie geht das?

Wegpunkte löschen. Mittels Menutaste (2) soweit durchblättern, bis man auf die Einstellungsseite kommt.

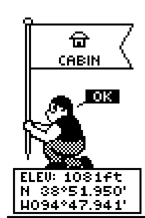


- Waypoint anwählen (OK Taste 3)und „alle Punkte löschen“ bestätigen.
- Tracks anwählen (auch auf der Seite, aber nicht auf dem obigen Bild) und „alle Tracks löschen“ betätigen.
- Mit den Routen das gleiche wie bei Tracks machen.

3. Wegpunkte setzen

Nachdem alles gelöscht ist kann man anfangen, die eigene Route abzulaufen und einzuspeichern.

Einen Wegpunkt setzt man, indem man für einige Sekunden die OK Taste (3) drückt. Es erscheint folgendes Bild:



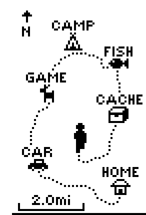
Einfach mit OK bestätigen und der Punkt wird festgehalten.

Tipp: Am besten die Nummer oder den Buchstaben jedes Wegpunktes auf einem extra Block notieren, da man ansonsten zum Schluss mit den ganzen Wegpunkten durcheinander kommt.

Es bietet sich zudem an, Wegpunkte nur an einer markanten Stelle zu setzen. Auf keinen Fall sollte man dies alle 50 Meter tun, da das Gerät maximal 36 Wegunkte speichern kann.

4. Abstände bestimmen

Hat man alle Wegpunkte eingespeichert kann man auf der Navigationsseite die Abstände zwischen den einzelnen Punkten anzeigen lassen. Hierzu auf die Navigationsseite wechseln. (Mehrmals die Menutaste (2) drücken)

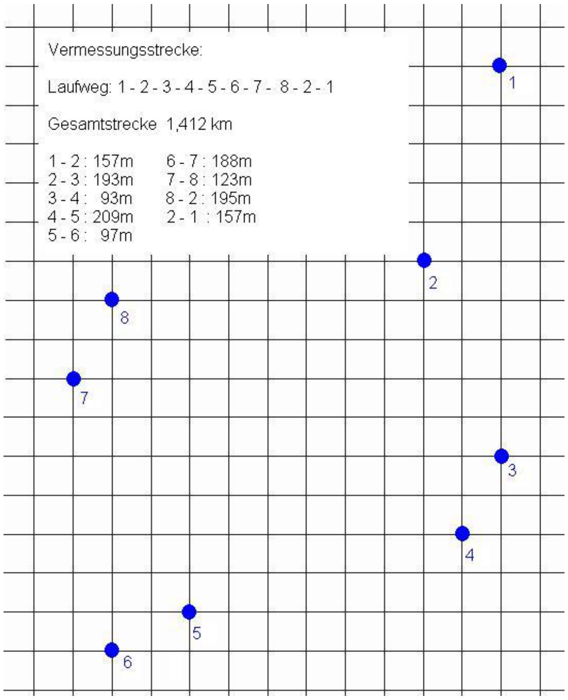


Im unteren Bereich sieht man eine Größenreferenz. In unserem Bild ist er auf 2 Meilen („2.0mi“) eingestellt, im Normalfall wird es aber „30 km“ sein. Ändern kann man dies mit den Tasten 4 und 5, wodurch die Karte größer oder kleiner wird.

Drückt man die OK - Taste (3) kann man die Distanz messen. Das entsprechende Feld „Distanz messen“ auswählen, mit OK bestätigen und man sieht im Display des Gerätes (vorerst) die Entfernung zwischen dem Aktuellen Standpunkt und dem zuletzt gespeicherten Wegpunkt. Mit den Tasten 4 und 5 kann man nun aus 3 verschiedenen Zeilen auswählen. Wichtig für uns sind lediglich die oberen beiden. Eine Zeile auswählen und mit OK bestätigen.

Hier nun einen der Wegpunkte auswählen. Bestätigt man diesen mit OK wird er automatisch in die Distanzmaske übernommen. Auf die gleiche Art und Weise den zweiten Punkt auswählen, und die kürzeste gelaufene Distanz zwischen den beiden Punkten wird angezeigt.

Gemessene Daten und Auswertung:



9.6 Vermessen mit dem GPS

➢ Messpunkte auf Karte auswählen:

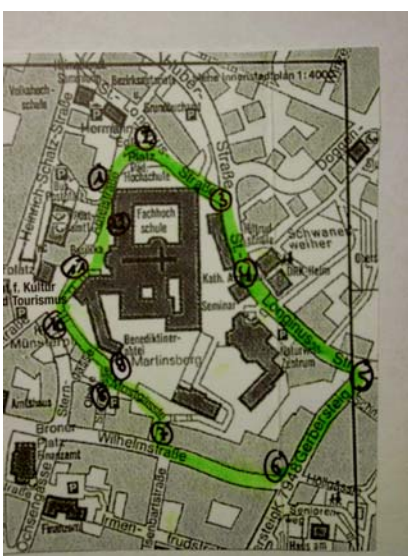


Abb. 9.4: Umriss des PH-Geländes

➢ Koordinaten aufnehmen

Punkt	Höhe	x-Wert	y-Wert
1	451 m	3548323	5297107
2	457 m	3548346	5297107
3	469 m	3548436	5297072
4	477 m	3548465	5296957
5	487 m	3548617	5296825
6	482 m	3548493	5296722
7	472 m	3548347	5296767
8	469 m	3548298	5296841
9	469 m	3548295	5296860
10	469 m	3548238	5296937
11	482 m	3548279	5296982
12	485 m	3548307	5297019

Das verwendetes GPS-Gerät:

Wegen der Komplexität, wurde bei der Rechnung die Höhe nicht mit einbezogen.

Der „x-Null-Wert“ wurde auf 3548200 gesetzt und der „y-Null-Wert“ auf 5296700.

➢ Koordinaten in ein geeignetes Computerprogramm übertragen

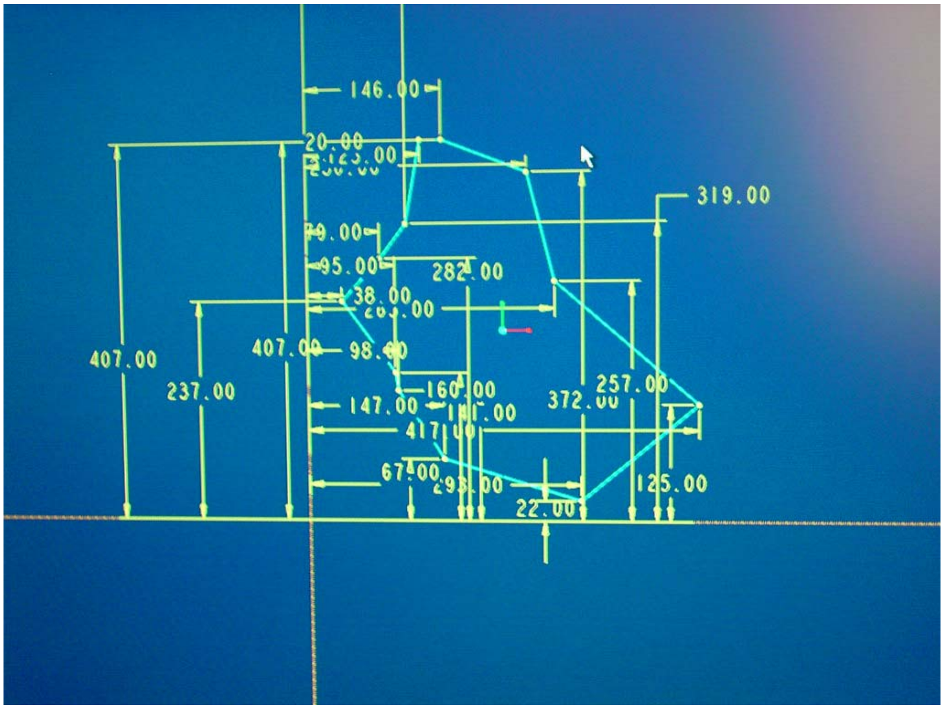


Abb. 9.5: Koordinaten im 3D-CAD-Programm (Pro ENGINEER 2001) dargestellt

9.7 Der Bezug zum Bildungsplan

Das Vermessen im Gelände mit einem GPS-Gerät kann bei der Vermittlung von verschiedenen Inhalten bzw. Kompetenzen des Bildungsplan 2004 behilflich sein. Für die Klassen 8 und 10 sind nachfolgende Lernziele explizit erwähnt.

Klasse 8:

2. LEITIDEE MESSEN

Die Schülerinnen und Schüler können

- Zahlen, Größen und *geometrische Objekte mit Vorstellungen* verbinden;
- die Prinzipien der *Längen- und Winkelmessung* sowie der *Flächen- und Volumenberechnung nutzen*;
- Messergebnisse in *sinnvollen Einheiten* angeben;
- mit *Formeln zur Berechnung von Flächeninhalt* und Umfang des Dreiecks umgehen, sie variieren und verstehen und sie auf zusammengesetzte Figuren anwenden; […]
- *Inhalte* mathematischer Themenbereiche *dokumentieren und präsentieren*.[14]

3. LEITIDEE RAUM UND FORM

Die Schülerinnen und Schüler können

- *geometrische Zusammenhänge* mithilfe von bekannten Strukturen *erschließen und* sie *algebraisch veranschaulichen* und darstellen;
- *rechnerische Beziehungen* zwischen *Seitenlängen, Flächeninhalt* und Volumina *herstellen*; […]
- bei Konstruktionen, Berechnungen und einfachen Beweisen *Sätze der Geometrie anwenden*.[15]

5. LEITIDEE DATEN

Die Schülerinnen und Schüler können

- in konkreten Situationen eine *Datenerfassung planen*;

[14] Kultus und Unterricht: Amtsblatt des Ministeriums für Kultus und Sport Baden-Württemberg, Bildungsplan für die Realschule, Lernplanheft 3/2004. Ministeriums für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.), Neckar-Verlag GmbH, Villingen-Schwenningen, 2004, S. 63.
[15] Kultus und Unterricht: Ebd. S, 63.

- Daten unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel bearbeiten, *in Tabellen erfassen* und *grafisch darstellen*.[16]

Klasse 10:

2. LEITIDEE MESSEN

Die Schülerinnen und Schüler können

- die *Prinzipien des Messens* und Aspekte ihrer Anwendung zum Beispiel in den Naturwissenschaften *nutzen*;
- Messergebnisse und berechnete Größen in *sinnvoller Genauigkeit* angeben;
- auf Grund von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten *Größen schätzen*;
- *gezielt Messungen* vornehmen, *Maßangaben entnehmen* und damit Berechnungen durchführen;
- *Ergebnisse* in Bezug auf die Situation *prüfen*; […]
- *Streckenlängen und Winkelgrößen in der Ebene* und im Raum mit trigonometrischen und Ähnlichkeitsbeziehungen *berechnen*.[17]

5. LEITIDEE DATEN UND ZUFALL

Die Schülerinnen und Schüler können

- *Daten systematisch sammeln* und *übersichtlich darstellen*;
- *Daten erfassen*, entnehmen, transferieren;
- verschiedene *mathematische Darstellungen* verwenden;
- *Daten interpretieren*;…[18]

9.8 Voraussetzungen für den Unterricht

Das GPS- Gerät ist nicht empfehlenswert für die Unterstufe. Um die Hintergründe des GPS im Ansatz erklären zu können, müssen mathematische Vorkenntnisse bereits vorhanden sein.

---

[16] Kultus und Unterricht: Ebd. S, 64.
[17] Kultus und Unterricht: Ebd. S, 65.
[18] Kultus und Unterricht: Ebd. S, 66.

Da die Geräte teuer sind (ab 150 Euro), kann man schlecht einen Klassensatz kaufen, das heißt die Schüler müssen in größeren Gruppen arbeiten und nicht alle Schüler können gleichzeitig beschäftigt werden.

Ziele des Unterrichts:

Der Umgang mit einem professionellen Vermessungsgerät ist für sehr viele Schüler noch unbekannt und so können sie ihre eigenen persönlichen Erfahrungen mit dem Umgang erfahren. Das GPS- Gerät könnte auch ein Anreiz für einen zukünftigen Berufszweig, dem des Vermessers, sein.
Streckenberechnungen oder Flächenberechnungen können durch das Instrument leichter kontrolliert oder bewiesen werden.

Nachteile des GPS-Geräts

- Das Verfahren setzt das mathematische Wissen eines Schülers der 9.-10. Klasse voraus. Da die Schüler jedoch in diesen Klassenstufen in der Prüfungsvorbereitung sind, ist es fraglich, ob so ein Projekt die nötige Zeit findet.
- GPS Geräte sind sehr teuer
- Zu wenige Schüler können gleichzeitig beschäftigt werden.
- Die genauen fachlichen Hintergründe des Geräts können im Schulalltag nicht erörtert werden, da der Wissensstandart nicht ausreicht.

Einsatzmöglichkeiten des GPS in der Schule

- Länge einer Strecke bestimmen.
- Den Flächeninhalt einer bestimmten Fläche bestimmen.
- Im Rahmen eines Schnitzeljagd ähnlichen Spiels. Den Schülern werden die Koordinaten der Stationen angegeben.

10. Literatur

Hier finden Sie einen Ausschnitt von weiterführender Literatur

- **Feldmessen und Karthographie** H.Fuhrer, Klett Perthes, Gotha, 1998
- **Geometrie im Gelände** E. Vollath, Auer, Donauwörth, 1989
- **Praktische Geometrie** H.-J. Vollrath (Hrsg.) Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1984
- **Vermessung eines Sees** M.Ludwig et. al., Berichte über Mathematik und Unterricht, U. Kirchgraber, (Hrsg.) ETH- Zürich
- **Geometrie: Die Erde vermessen Matthias Ludwig (Hrsg.)**Themenheft 124 Mathematik Juni 2004
- **Geometrie einmal anders** G. David, Math.Sch.(1991) S.524-532
- **Die Vermessung unseres Sees als Ferienerlebnis** W. Brinckmann, Math.Sch.(1988) S. 551-555
- **Theo und die andern** Altena, K u.a., bei MUED Verlag
- **Ge-wollte Vermessung** Kroepl, B., Mathematik lehren (Aug 98)/ (no.89) S. 68-69
- **Wie die alten Seefahrer ihren Weg fanden** V.Denke, S. Segelken, in: Matthias Ludwig (Hrsg.):Projekte im math.-nat. Unterricht, Franzbecker, Hildesheim 1999