Kapitel 5

Kapitel 5 Das Problemlösen

5.1. Einleitung

5.2. Theorie

5.2.1. fachwissenschaftliche Theorie
5.2.2. didaktische Theorie

5.3. Einteilung

Problemlöseaufgaben:

5.3.1. Berechnungsproblem

5.3.2. Beweisproblem

5.3.3. Konstruktionsproblem

5.3.4. offene Problemlöseaufgabe

Kapitel 5

5. Das Problemlösen

5.1. Einleitung:

Der Geometrieunterricht gilt traditionell als ein wichtiges **Übungsfeld für das Problemlösen**. Ein Ziel ist, bei den Schülerinnen und Schülern "die Freude am Problemlösen zu wecken und ihre Fähigkeit zum Lösen geometrischer Probleme zu fördern - in der berechtigten Hoffnung, dass sich damit auch ein positiver Transfer auf andere mathematische Bereiche einstellt" (Holland 1988, 10).

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen Routineaufgaben und Problemaufgaben.

5.2. Theorie:

5.2.1. fachwissenschaftliche Theorie:

Das folgende Aufgabenbeispiel soll den Unterschied zwischen Routineaufgabe und Problemlöseaufgabe deutlich machen und die charakteristischen Merkmale von Problemaufgaben aufzeigen.

Beispiel:

Von einem Trapez sind die Längen der parallelen Seiten und die Höhe gegeben:
Frage: Wie groß ist sein Flächeninhalt?

- Kennen die Schüler bereits die Flächeninhaltsformel des Trapezes:

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + c)$ $\Rightarrow$ dann handelt es sich um eine **Routineaufgabe**.

- Kennen die Schüler die Flächeninhaltsformel des Trapezes nicht:

  … so kennen sie vielleicht die Flächeninhaltsformel des Parallelogramms und des Dreiecks

  1. Zerlege das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck.
  2. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.
  3. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.
  4. Addiere beide Flächeninhalte. Die Summe ist der gesuchte Flächeninhalt des Trapezes.

  $\Rightarrow$ In diesem Fall handelt es sich ebenso um eine **Routineaufgabe**.

- Kennen die Schüler jedoch weder die Formel des Trapezes noch ein so genanntes Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhaltes eines Trapezes:

  $\Rightarrow$ In diesem Fall ist die Aufgabe für sie eine **Problemaufgabe**. Bei der

Kapitel 5

Suche nach einem Verfahren zur Lösung der Aufgabe haben sie einer Problembarriere, die den Weg von dem gegebenen Anfangszustand zu dem gesuchten Zielzustand versperrt.

Um diese Barriere zu überwinden sollte der Schüler über folgende Kenntnisse bzw. Fähigkeiten verfügen:

(Z) Zerlegen eines Vielecks in Teilvielecke
(A) Berechnen des Flächeninhaltes eines Vielecks aus den Flächeninhalten der Teilvielecken bei einer Zerlegung.
(P) Berechnen des Flächeninhaltes eines Parallelogramms aus einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe mit Hilfe der Flächeninhaltsformel.
(D) Berechnen des Flächeninhalts eines Dreiecks aus einer Seitenlänge und der zugehörigen Höhe mit Hilfe der Flächeninhaltsformel.

Aufgrund dieses Vorwissens könnten die Schüler dann das oben angegeben Verfahren zur Berechnung des Trapezflächeninhaltes selber entdecken.

Die vorausgesetzten Kenntnisse und Fertigkeiten (Z), (A), (P) und (D) wirken als so genannte Operatoren (**Operatoren** = Sätze, Formeln, Verfahren) in dem Problemlöseprozess. Das Problem ist gelöst, wenn eine Operatorkette gefunden ist, die durch sukzessive Anwendung der einzelnen Operatoren vom Anfangszustand zum Zielzustand führt.

Man nennt eine Aufgabenstellung ein **Interpolationsproblem** für den Problemlöser, wenn die Situation durch folgende Merkmale charakterisiert ist:

1. Der Anfangszustand (das Gegebene) ist genau definiert.
2. Der Zielzustand (das Gesuchte) ist genau definiert.
3. Eine Lösung der Aufgabe, d.h. ein Operator oder eine Operatorenkette, die den Anfangszustand in den Zielzustand überführt, ist dem Problemlöser nicht bekannt.
4. Der Problemlöser verfügt über Operatoren, die die Lösung des Problems gestatten.

Kapitel 5

5.2.2. didaktische Theorie:

In der jüngsten Diskussion überwiegt eine breitere Sichtweise und eine damit einher gehende Verknüpfung mit anderen Aspekten:

- Unter dem Aspekt der **Anwendungsorientierung** wird das Problemlösen nicht nur auf innermathematische Probleme beschränkt, sondern es kommt der Aspekt der Modellbildung hinzu.

- Der Aspekt der **Kreativität** wird zunehmend ins Blickfeld gerückt; damit gewinnen offene Probleme und Probleme, die eine Vielzahl von Lösungen auf unterschiedlichen Ebenen zulassen, an Bedeutung.

- Aus heutiger Sicht erscheinen folgende Ziele für das Problemlösen im Mathematikunterricht **sinnvoll und realistisch** (nach Bruder 2002, 4): Die Schülerinnen und Schüler
  - erkennen mathematische Fragestellungen - auch in Alltagssituationen;
  - können solche Fragestellungen formulieren;
  - kennen mathematische Modelle und geeignete Vorgehensweisen zur (kreativen) Bearbeitung mathematischer Fragestellungen und können diese situationsgerecht anwenden.

Zu diesen mathematikbezogenen Zielen kommen auch allgemeine (nicht fachbezogene) Ziele:

- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Anstrengungsbereitschaft und Reflexionsfähigkeit für ihr eigenes Handeln.

- Das Problemlösen im Mathematikunterricht lässt sich so **charakterisieren**:
  - o Anders als bei "Standardaufgaben" oder "Päckchenaufgaben" ist den Schülerinnen und Schülern **kein explizites Lösungsverfahren** (**kein <u>Algorithmus</u>**) bekannt.
  - o Es gibt allerdings **heuristische Strategien**, die beim Finden einer Lösung hilfreich sein können - zur Lösung ist kein "Trick" erforderlich. "Heuristische Strategien liefern Impulse zum Weiterdenken, sie bieten aber keine Lösungsgarantie wie ein Algorithmus." (Bruder 2003, 6)

Ob im Mathematikunterricht ein "echtes" Problem vorliegt, hängt stets vom **vorausgegangen Unterricht** ab: So kann die Aufgabe, den Abstand zweier

Kapitel 5

windschiefer Geraden zu bestimmen, im Grund- oder Leistungskurs ein offenes Problem sein, aber auch nur eine von vielen "Päckchenaufgaben" nach der Besprechung eines Lösungsverfahrens und mehreren Beispielaufgaben.

Abhängig von ihrer Reichweite lassen sich heuristische Strategien in zwei Kategorien einteilen:

Inhaltsspezifische heuristische Strategien beziehen sich auf Teilbereiche der Geometrie ("Rechtwinkliges Dreieck: Kannst du den Satz von Pythagoras anwenden?", "Suche eine geschlossene Vektorkette!").

Inhaltsübergreifende heuristische Strategien gelten für das Problemlösen im Mathematikunterricht im Allgemeinen (z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Generalisieren und Spezialisieren, ...).

Inhaltsspezifische heuristische Strategien:

Typische **inhaltsspezifische heuristische Strategien** für Berechnungsprobleme der ebenen Sekundarstufen-I-Geometrie sind

- das Einzeichnen geeigneter **Hilfslinien**,
- das **Suchen gleich langer Strecken** (gleichschenklige oder -seitige Dreiecke, Seiten eines Parallelogramms, Kreisradien, ...),
- das **Suchen gleich großer oder einander ergänzender Winkel** (gleichschenklige oder -seitige Dreiecke, Winkel eines Parallelogramms, Winkelsumme im n-Eck, Winkel an Geradenkreuzungen, ...),
- das **Suchen rechtwinkliger Dreiecke** bzw. Teildreiecke, um einen der Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras anwenden zu können,
- das **Suchen kongruenter Dreiecke**, um gleich lange Strecke bzw. gleich große Winkel zu bestimmen,
- das **Suchen ähnlicher Dreiecke**, um Streckenverhältnisse zu bestimmen,
- das **Suchen paralleler Geraden** als Voraussetzung für die Anwendung der Winkelbeziehungen an Geradendoppelkreuzungen oder der Strahlensätze,
- das **Suchen inhaltsgleicher Drei- oder Vierecke**, um aus den jeweiligen Formeln für die Flächeninhalte unbekannte Größen errechnen zu können,
- Das **Suchen ergänzungsgleicher oder zerlegungsgleicher Flächen**.

Kapitel 5

Inhaltsübergreifende heuristische Strategien

Typische **inhaltsspezifische heuristische Strategien** der Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II sind

- das **Koordinatisieren** (das Suchen eines für die Problemlösung günstigen Koordinatensystems) und im Anschluss daran das **Vektorisieren** (die Erfassung von Strecken, Geraden, Ebenen, Kreisen, Kugeln, ... mit Hilfe von Vektorgleichungen) und das **Parametrisieren** (die Beschreibung von Bahnkurven durch Parametergleichungen),

- das **Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme** durch das Betrachten von Schnittfiguren eines Körpers oder einer Fläche mit einer Ebene oder von Projektionen eines Körpers oder einer Fläche in eine der Koordinatenebenen,

- das **Suchen geschlossener Vektorketten**, um Vektorgleichungen aufstellen zu können,

- die **Verwendung des Normalenvektors**, durch den sich die Lage von Ebenen häufig sehr einfach erfassen lässt,

- das **Betrachten von Hilfsebenen**, die zu gegebenen Vektoren orthogonal oder parallel sind,

- das **Prinzip des allgemeinen Geraden- oder Ebenenpunktes**, um Gleichungen aufzustellen, die dann in verschiedener Weise gelöst werden können,

- das **Anwenden des Skalarprodukts**, um Winkel oder Strecklängen zu bestimmen,

- das **Nullwerden des Skalarprodukts orthogonaler Vektoren** als Möglichkeit, Vektorgleichungen aufzustellen oder zu vereinfachen,

- das **Anwenden des Ableitungskalküls der Analysis**, um bei Abstandsberechnungen Minima zu bestimmen.

Inhaltsübergreifende heuristische Strategien gelten für das Problemlösen im Mathematikunterricht im Allgemeinen (z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Generalisieren und Spezialisieren, ...).

Sollen Schülerinnen und Schüler heuristische Strategien erwerben, so setzt dies ein Bewusstmachen und Reflektieren eigener Lösungsansätze (und zwar sowohl erfolgreicher als auch fehlgeschlagener) voraus: "Unter lerntheoretischen Aspekten kann man das Wirkungsprinzip heuristischer Strategien stark verkürzt etwa so beschreiben: Wenn es gelingt, die meist unterbewusst verfügbaren Problemlösemethoden geistig besonders beweglicher Personen herauszuarbeiten und diese bewusst in Form von Heurismen zu erlernen und anzuwenden, können ähnliche Leistungen erbracht werden, wie von den intuitiven Problemlösern." (Bruder 2003, 6)

Inhaltsübergreifende (allgemeine) heuristische Strategien geben eine Hilfe bei der Frage "Wie finde ich eine Lösung?". Polya (1967) unterteilt den Problemlöseprozess in vier Schritte, und gibt zu jeden Schritt entsprechende Fragen (zitiert nach Zech 1996, 311ff):

Verstehen der Aufgabe

Was ist unbekannt?
Was ist gegeben?
Wie lautet die Bedingung?
Zeichne eine Figur! Führe passende Bezeichnungen ein!

Entwickeln eines Lösungsplans

Kennst du eine verwandte Aufgabe?
Kennst du einen Lehrsatz, der hilfreich sein könnte?
Kannst du die Aufgabe auch anders formulieren?
Gehe auf die Definition zurück!
Wenn du die Aufgabe nicht lösen kannst, versuche zunächst, eine ähnliche Aufgabe zu lösen oder eine speziellere Aufgabe. Kannst du einen Teil der Aufgabe lösen?
Kannst du aus den Angaben etwas Hilfreiches ableiten?
Hast du alle Angaben verwendet?

Ausführung des Plans
Wenn du deinen Lösungsplan durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst du begründen, dass er richtig ist?

Rückschau
Kannst du dein Ergebnis kontrollieren?
Kannst du das Ergebnis auch noch auf eine andere Weise herleiten?
Wie bist du zu dem Ergebnis gelangt?

Kapitel 5

Hilfen für das Problemlösen

Der Lehrer oder die Lehrerin können den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche **Hilfen für das Problemlösen** geben
(nach Zech 1996, 315ff):

Motivationshilfen sollen das Durchhaltevermögen der Schülerinnen und Schüler fördern.

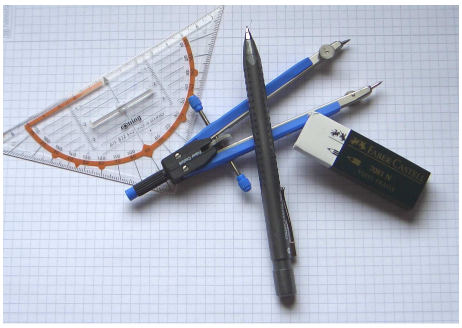
Rückmeldungshilfen geben den Schülerinnen und Schülern Auskunft darüber, ob sie sich auf dem richtigen Weg befinden.

Allgemeine strategische Hilfen (oder **prozessorientierte Hilfen**) geben Hinweise darauf, wie der Lösungsprozess sinnvoll gestaltet werden kann. Sie beziehen sich auf die heuristischen Strategien (vgl. oben).

Inhaltsorientierte strategische Hilfen beinhalten stets auch einen mathematischen Aspekt.

Konkrete inhaltliche Hilfen (oder **ergebnisorientierte Hilfen**) geben gezielt einen für die Lösung fehlenden Hinweis.

5.3. Einteilung :



Es gibt drei Arten von Interpolationsproblemen:

1. Berechnungsproblem
2. Beweisproblem
3. Konstruktionsproblem

Kein Interpolationsproblem:

4. offene Problemlöseaufgabe

Kapitel 5

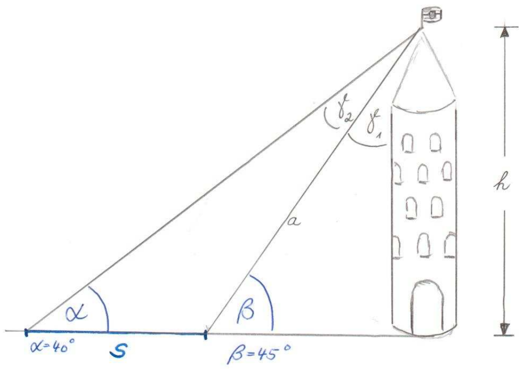
1. Berechnungsproblem

Unter einem geometrischen Berechnungsproblem verstehen wir eine Aufgabenstellung, bei der aus gegebenen Größen oder Größenverhältnissen einer geometrischen Konfiguration eine oder mehrere unbekannte Größen oder Größenverhältnisse zu berechnen sind. Je nachdem, ob die gegebenen Größen oder Größenverhältnisse durch spezielle Zahlenwerte konkretisiert sind, oder aber als Variable vorgegeben sind, sprechen wir von speziellen bzw. allgemeinen Berechnungsproblemen. Unter der Voraussetzung, dass die Schüler über die zur Problemlösung relevanten Operatoren (Sätze, Formeln, Verfahren) verfügen, handelt es sich bei Berechnungsproblemen um Interpolationsprobleme.

<u>Beispiele:</u>

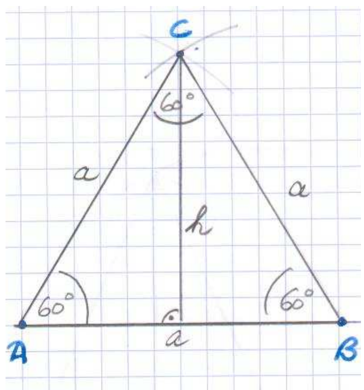
<u>Siehe Übung 8</u>

Berechnung der Höhe eines Turmes bei folgenden gegeben Größen
$\beta = 45, \alpha = 40° s = 10m$.



Regelmäßiges gleichseitiges Dreieck

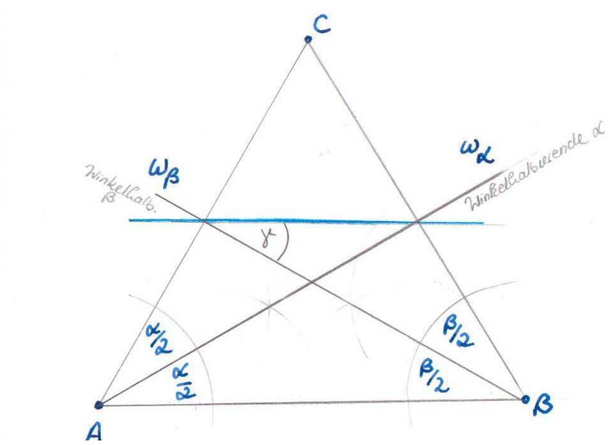
Berechnung des Flächeninhaltes in Abhängigkeit von a.



Gegeben: β, α Gesucht: γ

Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe des Sinus - und Kosinussatzes der Trigonometrie (welche frühestens in der 10. Klasse behandelt werden) lösbar.

→ Nach Behandlung der Trigonometrie wird diese Aufgabe zu einem Interpolationsproblem



Kapitel 5

2. Beweisproblem

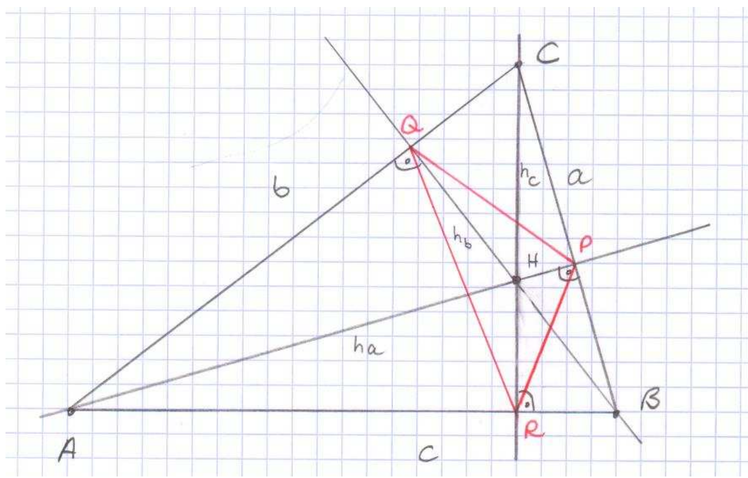
Unter dem geometrischen Beweisproblem verstehen wir eine Aufgabenstellung, bei der zu einer allgemeingültigen geometrischen Aussage ein Beweis gefunden werden soll. Jeder Beweis der Aussage ist somit eine Lösung des Beweisproblems. Er lässt sich darstellen als Sequenz von Beweisschritten, die als Beweiszeilen notiert werden. Die Sequenz der Beweisschritte ist jedoch nicht eindeutig festgelegt, d.h., gewisse Beweiszeilen sind in der Reihenfolge austauschbar. Die gegenüber der Notierung des Beweises als Sequenz von Beweisschritten invariante Beweisstruktur wird dargestellt durch einen Beweisgraph.

<u>Beispiel:</u>

Siehe Übung 9

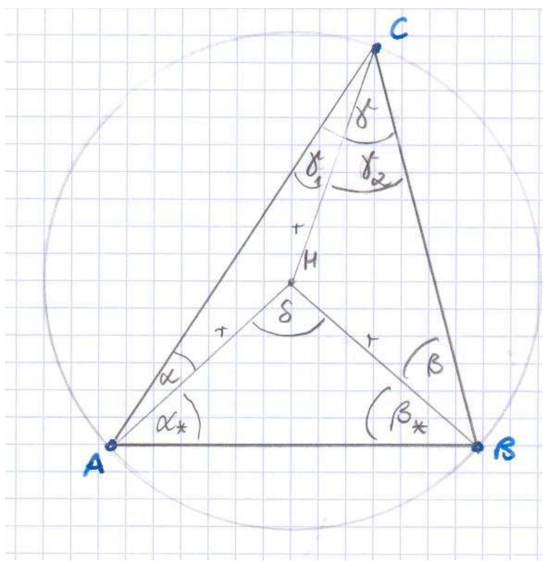
1. Beweis:

Beim Höhenfußpunktdreieck sind Sie die Höhen des Ausgangsdreiecks Winkelhalbierende.



2. Beweis Peripheriewinkelsatz

$$\gamma = \frac{\delta}{2}$$



Kapitel 5

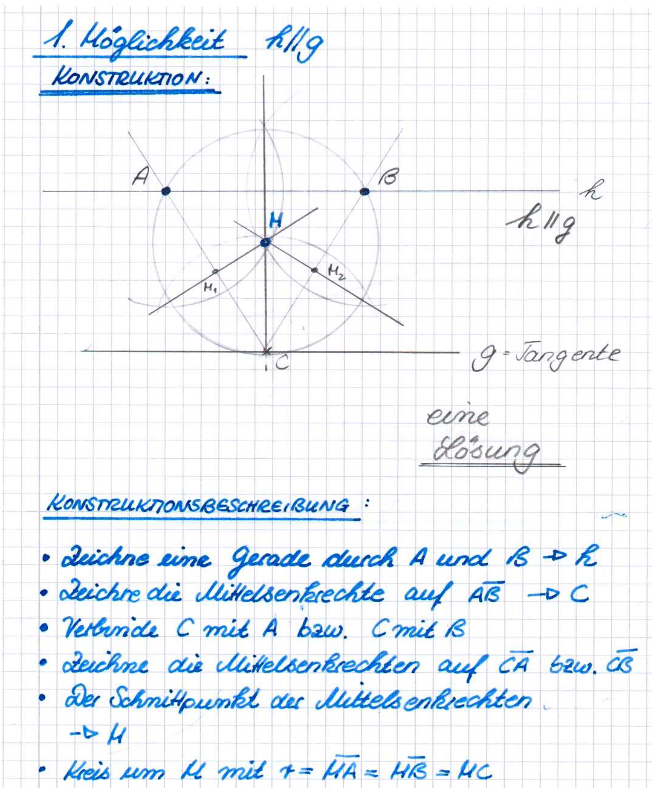
3. Konstruktionsproblem

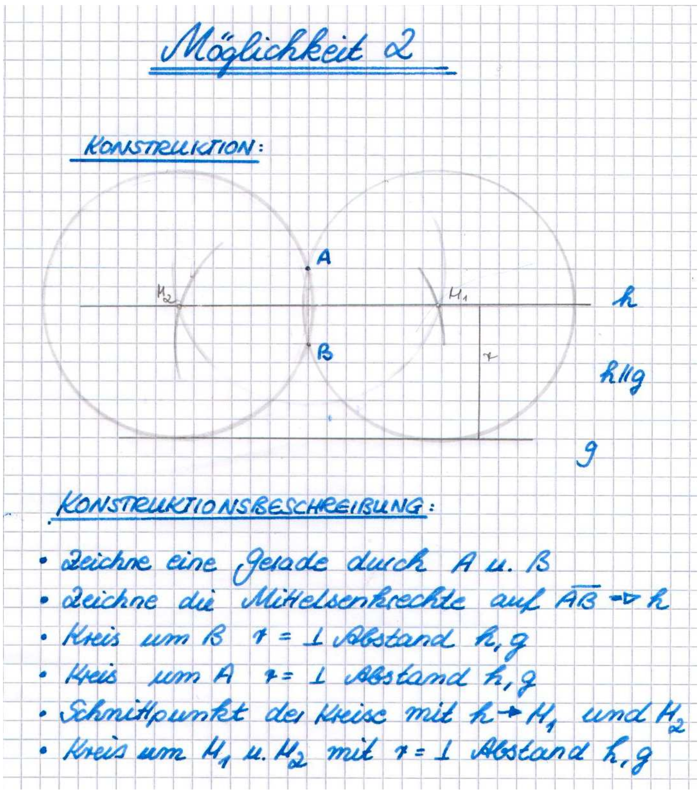
Mit dem Begriff der geometrischen Konstruktion und der Darstellung der Problemlösung durch eine Konstruktionsbeschreibung haben wir uns bereits ausführlich im Kap. 4 beschäftigt. Hier geht es um die Frage: Wie kann man die Lösung bzw. die Lösung einer Konstruktionsaufgabe finden? Ebenso wie bei Berechnungs- und Beweisproblemen gibt es für Konstruktionsprobleme heuristische Regeln, deren Anwendung in vielen Fällen die Problemlösung erleichtert. Diese sind hier jedoch von anderer Art, als in den beiden anderen Problembereichen. Insbesondere sind die beiden Verfahren des Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeitens nicht anwendbar.

Beispiel:

Beispiel1: Siehe Übung 9

Gegeben sind verschiedene zwei Punkte A und B und eine Gerade g. A und B liegen nicht auf g. Konstruieren Sie einen Kreis K der durch A und B geht und sowohl g als Tangente hat. Unterscheiden Sie möglichst viele Spezialfälle. Und notieren Sie für jeden Fall und Konstruktionsschritt der notwendigen Voraussetzungen (Operatoren).





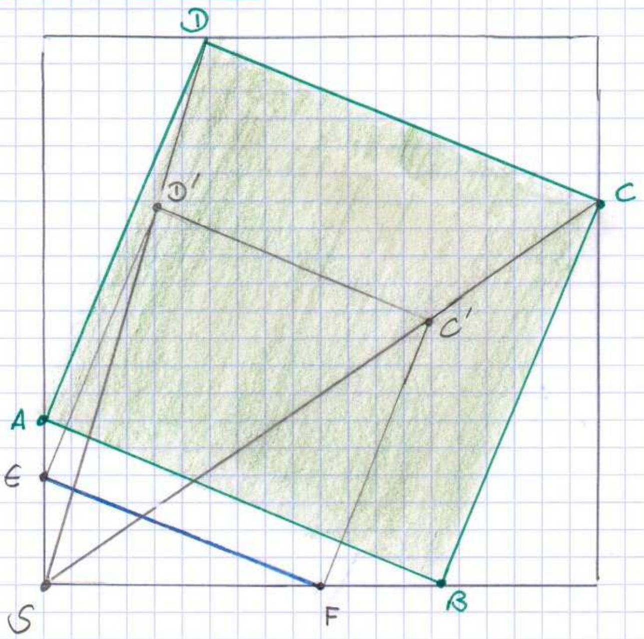
Kapitel 5

……

Beispiel 2.:

Zentrische Streckung

KONSTRUKTION:



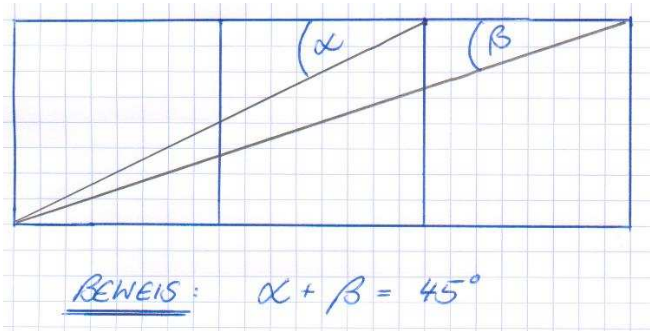
KONSTRUKTIONSBESCHREIBUNG:

- Kreisbogen um F mit $r = \overline{EF}$ (Einzeichen eines Quadrates $a = \overline{EF}$)
- $\perp$ auf $\overline{EF}$ ab F → Schnittp. mit Kreisbogen ergibt C'
- $\perp$ auf $\overline{EF}$ ab E und
  $\perp$ auf $\overline{FC'}$ ab C' → ergibt D'

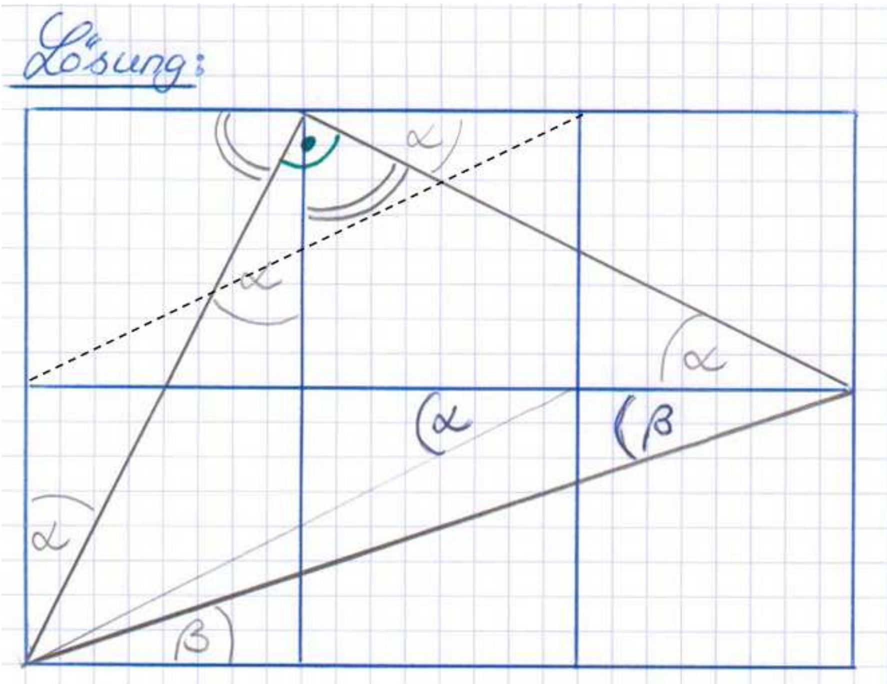
Kapitel 5

4. offene Problemlöseaufgabe

Beispiel



Die Idee, die Gitterfigur zu ergänzen, um die beiden Winkel Alpha und Beta so aneinanderzulegen, dass ein gleichschenkliges- rechtwinkliges Dreieck entsteht, ist sicher nicht nahe liegend.



Diese Art von Problemaufgabe nennt man eine offene Problemlöseaufgabe, die deshalb kein Interpolationsproblem ist weil die Bedingungen (siehe Seite 3) nicht erfüllt sind.

Benutzte Sätze:
- ✓ Wechselwinkel
- ✓ Stufenwinkel
- ✓ Winkelsumme im Dreieck
- ✓ Nebenwinkel
- ✓ Gleichschenklige Dreiecke

Kapitel 5