Kapitel 3

Kapitel 3 Beweisen und Argumentieren

3.1. Überblick

3.2. Theorie

3.3. Beispiele

Kapitel 3

3.1. Beweisen und Beweisdarstellung

3.1.1. Darstellung eines Beweises als Sequenz von Beweisschritten

Unter einem Beweis eines mathematischen Satzes versteht man dessen logische Reduktion auf andere mathematische Sätze S1, S2, …, Sn. Ist S mit Hilfe von S1, S2, …, Sn bewiesen, so folgt die Gültigkeit des Satzes S aus der Gültigkeit der Sätze S1, S2, ..., Sn.

Die Aufgabe, mit Hilfe schon anerkannten Sätzen einen neuen Satz zu beweisen, hat zwei Aspekte, die man – insbesondere für didaktische Überlegungen und Entscheidungen – deutlich trennen sollte:

1. Beweisfindung

Hat man noch keine Vorstellung davon, wie ein Satz mit Hilfe anderer Sätze bewiesen werden kann, so muss man zunächst einmal einen Beweis finden. Hier handelt es sich um ein mehr oder weniger schwieriges Problem, welches gegebenenfalls mit Hilfe heuristischer Problemlösestrategien gelöst werden muss.

2. Beweisdarstellung

Ein gefundener Beweis muss schriftlich so dargestellt werden, dass er kommunizierbar ist, d.h., von anderen Fachleuten (Mitschülern) nachvollzogen und als korrekt anerkannt werden kann. Der Satz wird dann als wahr anerkannt.

Für die übersichtliche Darstellung eines Beweises ist es zweckmäßig, diesen als Sequenz von Beweisschritten zu notieren.

(siehe Geometrie in der Sekundarstufe – Didaktische und methodische Fragen 2. Auflage ; G. Holland ; Spektrum Verlag S.33ff)

Kapitel 3

3.1.2. Einteilung

Argumentieren und Beweisen sind wichtige Aktivitäten im Geometrieunterricht aller Jahrgangsstufen und Schularten.

Einteilung in drei Teilgebiete

- **Schülerkonzepte zum Beweisen** im Mathematikunterricht bilden einen wichtigen Ausgangspunkt für die Unterrichtsplanung.

- Die Unterscheidung von **Niveaustufen des Beweisens und Argumentierens** im Mathematikunterricht ist ein weiteres wesentliches Element der Unterrichtsplanung.

- **Kongruenzbeweise und Abbildungsbeweise** sind zwei wichtige, im Mathematikunterricht praktizierte Beweisverfahren.

Kapitel 3

1. Schülerkonzepte

Überblick:

Wie gehen Schülerinnen und Schüler vor, wenn sie selbstständig beweisen sollen? Insbesondere: Welche **Schülerfehler** treten beim Führen von Beweisen auf?

Welche **Einstellung** haben Schülerinnen und Schüler zu Beweisen? Insbesondere: Inwiefern empfinden Schülerinnen und Schüler ein **Beweisbedürfnis**?

Für Beweise, insbesondere für deren Darstellung, gelten in der Fachwissenschaft Mathematik bestimmte Konventionen. Wenn Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht das Beweisen erlernen sollen, so entwickeln sie häufig **individuelle Vorgehensweisen**, die nicht immer mit den in der Fachwissenschaft üblichen übereinstimmen müssen: Von Schülern geführte Beweise sehen nicht selten völlig anders aus als mathematisch korrekte Beweise. Auch die **individuellen Vorstellungen** darüber, was ein gültiger und korrekter Beweis ist, können abweichen: Schülerinnen und Schüler besitzen bestimmte Vorerfahrungen (z.B. zu geometrischen Begriffen) oder sie argumentieren entsprechend ihrer "Alltagslogik". Schülerinnen und Schüler besitzen darüber hinaus **individuelle Einstellungen** zu Beweisen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. Alle diese Aspekte - Vorgehensweisen, Vorstellungen und Einstellungen - lassen sich als **individuelle Konzepte** zum Beweisen zusammenfassen.

Theoretischer Gesichtspunkt:

Im Hinblick auf **das Beweisbedürfnis von Schülern und ihre Einstellung zu Beweisen** zeigen alle empirischen Untersuchungen:

Schüler der Sekundarstufe I empfinden **in der Regel kein Beweisbedürfnis**. In allen Untersuchungen treten Defizite zu Tage, die ein fehlendes Bewusstsein bezüglich der Tätigkeit des Beweisens und des Sinns von Beweisen betreffen. Für Schüler genügt meistens das Nachmessen oder Überprüfen anhand einer Zeichnung als "Beweis". Die Motivation zum Beweisen ist demnach eines der großen Probleme im Geometrieunterricht.

Eng damit verbunden ist eine **weitgehend ablehnende Haltung** gegenüber den als unnötig empfundenen Beweisen im Geometrieunterricht.

In Bezug auf **Schülerfehler beim Führen von Beweisen** liefern die vorliegenden empirischen Untersuchungen ein gemischtes Bild.

Einige Untersuchungen zeigen, dass Schüler im Rahmen gezielter Unterrichtssequenzen das **selbstständige Führen einfacher Beweise** durchaus erfolgreich erlernen können. In anderen Untersuchungen treten **vielfältige Schülerfehler** beim Beweisen auf. Beweise werden manchmal ziellos geführt und mit einzelnen formalen Elementen angereichert. Diese Schülerfehler sind teilweise auch **Ausdruck eines fehlenden Bewusstseins über den Sinn von Beweisen**.

Kapitel 3

2. Niveaustufen

Überblick

Für den Mathematikunterricht lassen sich verschiedene Niveaustufen des Beweisens und Argumentierens unterscheiden, und zwar im Hinblick auf

1. den **Umfang der deduktiven Darstellung**: globales Ordnen und lokales Ordnen;

2. die **Darstellung oder Repräsentationsform des Beweises oder der Argumentation**: formale Beweise und anschaulich-inhaltliche Beweise.

Theorie

1. Niveaustufen des Beweisens lassen sich im Hinblick auf den **Umfang der deduktiven Darstellung** bilden. Freudenthal (1973) unterscheidet globales und lokales Ordnen:

- **Globales Ordnen**: Ein mathematisches Teilgebiet wird, ausgehend von einem Axiomensystem, vollständig (global) deduktiv dargestellt. Diese Vorgehensweise ist in der Fachwissenschaft Geometrie von großer Bedeutung, im Mathematikunterricht hingegen nicht durchführbar.

- **Lokales Ordnen**: Nur in einzelnen, ausgewählten Bereichen eines Teilgebiets werden Beweise geführt und wird mit Beweisen gearbeitet, während in anderen Bereichen auch anschauliche und inhaltliche Überlegungen zum Tragen kommen. So werden beispielsweise die Beziehungen einzelner Sätze näher untersucht oder Sachverhalte auf eine Grundlage zurückgeführt, die anschaulich klar ist, manche Begriffe jedoch auch "nur" anhand von Beispielen und Gegenbeispielen eingeführt.

In den 70er Jahren, zu Zeiten der "Neuen Mathematik", publizierte Ansätze, die gesamte ebene Geometrie der Sekundarstufe I deduktiv-axiomatisch aufzubauen, haben sich nicht durchgesetzt. So versteht Freudenthal die Idee des lokalen Ordnens denn auch als einen Gegenentwurf zu einem vollständigen deduktiv-axiomatischen Aufbau der Sekundarstufen -I- Geometrie.

2. Darstellung oder Repräsentationsform des Beweises
Darstellungsebenen mathematischen Wissens (enaktiv, ikonisch, symbolisch) nach Bruner an: (siehe Übung 5)

- **Formale Beweise** sind Beweise im Sinne der Fachwissenschaft Mathematik. Sie sind stets lückenlos und vollständig, sowie allgemeingültig und unter Einhaltung der üblichen Konventionen abgefasst.

- Als **anschaulich-inhaltliche Beweise** oder **präformale Beweise** bezeichnet man Begründungen oder Argumentationen, die entweder enaktiv (in Form von

Handlungen) oder ikonisch (unter Rückgriff auf Zeichnungen oder Modelle) geführt werden. Sie sind zwar im Sinne der Fachwissenschaft Mathematik nicht als Beweis anerkannt, geben jedoch den "mathematischen Kern" des Sachverhalts korrekt wider und lassen sich gegebenenfalls auch formalisieren.

Anschaulich-inhaltliche Beweise basieren häufig auf Beispielen, die für den allgemeinen Fall repräsentativ sind (**paradigmatische Beispiele**).

Anschaulich-inhaltliche Beweise besitzen im Geometrieunterricht aller Schularten und -stufen große Bedeutung: Sie geben mathematische Zusammenhänge in einer für Schüler adäquaten Repräsentationsform wieder und können damit maßgeblich zum Verständnis eines Satzes beitragen.

<u>Beispiele:</u>

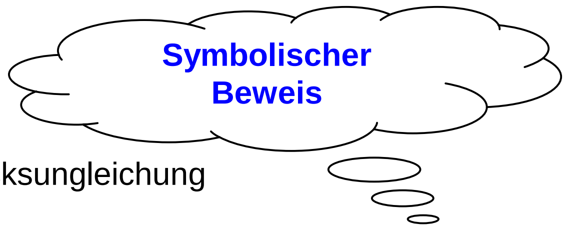
1. Beweis:

Der Umfang eines Vierecks ist größer als die Summe der beiden Diagonalenlängen.

1. Ein <u>symbolischer (formaler) Beweis</u> beruht auf der Dreiecksungleichung.

<u>Satz:</u>
Der Umfang eines Vierecks ist größer als die Summe der beiden Diagonalenlängen.

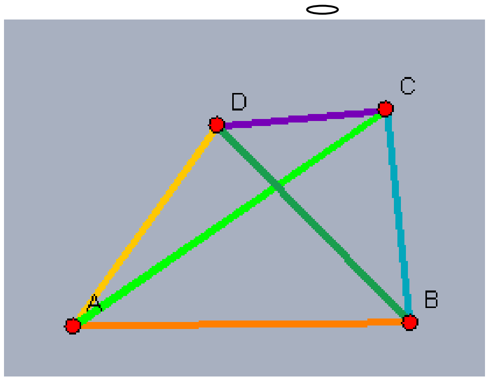
Beweis: Zu beweisen ist:



$$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$

Auf jedes der vier Teildreiecke kann die Dreiecksungleichung

angewendet werden:



$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \text{ und } \overline{AC} < \overline{CD} + \overline{DA}$$

$$\overline{BD} < \overline{BC} + \overline{CD} \text{ und } \overline{BD} < \overline{DA} + \overline{AB}$$

Durch die Addition dieser vier Ungleichungen folgt:

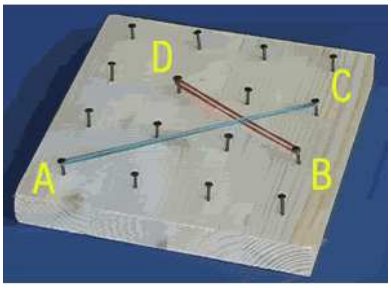
$$2 \cdot \overline{AC} + 2 \cdot \overline{BD} < 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$$
$$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$

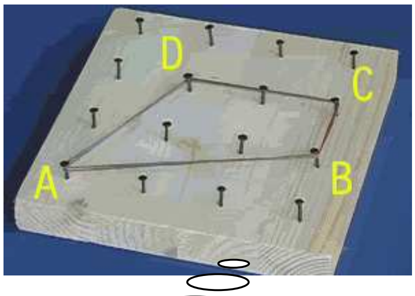
Kapitel 3

2. Ein **<u>anschaulich-inhaltlicher, auf Handlungen basierender Beweis</u>** beruht auf Handlungen (Dehnen von Gummiringen), die die entsprechenden Beziehungen (Dreiecksungleichung) realisieren.

<u>Satz:</u>
Der Umfang eines Vierecks ist größer als die Summe der beiden Diagonalenlängen.

Der anschaulich-inhaltliche, auf Handlungen basierende Beweis beschränkt sich auf ein konvexes Viereck: Es wird durch vier eingeschlagene Nägel und einen Gummiring längs jeder Diagonalen realisiert. Nun werden die Gummiringe so gedehnt, dass sie außen um alle vier Nägel herumlaufen. Dabei ist am Anfang jede Diagonale, am Ende jede Seite doppelt bedeckt. Da man beide Gummiringe dehnen muss, folgt die Behauptung (nach Fischer/Malle 1985, 187). Der anschaulich-inhaltliche und auf Handlungen basierende Beweis enthält bereits die Beweisidee und nimmt alle wesentlichen Beweisschritte vorweg: Die Handlungen (Dehnen von Gummiringen) werden letztlich in Beziehungen (Dreiecksungleichung) übergeführt.
Ist das Viereck nicht konvex, ist der formale Beweis weiterhin gültig, der anschaulich-inhaltliche und auf Handlungen basierende Beweis jedoch anders zu führen.





enaktiver Beweis

Weitere Beispiele siehe Übungsblatt 5

Kapitel 3

3. Kongruenz- und Abbildungsbeweise

Theorie

Bei vielen Beweisen schließt man aus der vorausgesetzten oder schon bewiesenen Gleichheit gewisser Längen und/oder Winkelmaße auf die Gleichheit zweier weiterer Längen bzw. Winkelmaße. Hierzu gibt es prinzipiell **zwei verschiedene Methoden** (vgl. Holland 1988, 66ff):

- **Kongruenzmethode**:
  Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und beweist deren Kongruenz mit Hilfe der Kongruenzsätze. Hieraus kann man auf gleich große Winkel oder gleich lange Strecken schließen.

- **Abbildungsmethode**:
  Man wendet eine Kongruenzabbildung auf eine Figur oder eine Teilfigur an und folgert die Längen- bzw. Winkelgleichheiten aus den Eigenschaften dieser Kongruenzabbildung.

Gegenüberstellung der Kongruenzmethode und der Abbildungsmethode

Kongruenzmethode:

Argumente pro
Das schrittweise Suchen nach "statischen" gegebenen Größen (Längen, Winkelmaße) und das anschließende Vergleichen und paarweise Zuordnen dieser Größen erscheint einfacher als die "dynamische" Vorstellung einer geometrischen Abbildung und der Eigenschaften.

Die vier Kongruenzsätze sind klar zu überblicken, im Gegensatz zu den unzähligen Eigenschaften der einzelnen Abbildungen bei der Abbildungsmethode. Sowohl die Beweisfindung als auch die Beweisdarstellung sind bei der Kongruenzmethode einfacher, die daher zur Realisierung von Prozesszielen des Beweisens als geeigneter erscheint.

Argumente contra
Die Zusammenhänge zwischen den betrachteten Figuren treten bei der Kongruenzmethode nicht so klar hervor wie bei der Abbildungsmethode.

Die Kongruenzmethode kann leicht zu einem schematisch durchgeführten Verfahren werden und führt letztlich von den Abbildungen als Leitideen der Sekundarstufen-1 -Geometrie weg.

Abbildungsmethode:

Argumente pro
Abbildungsbeweise lassen verschiedene **Niveaustufen des Beweisens und Argumentierens** können auch enaktiv mittels Transparentpapier o.ä. realisiert werden. Darum erscheint die Methode insbesondere für leistungsschwächere Schüler als geeignet.

Viele Eigenschaften geometrischer Figuren, die man traditionell mit Kongruenzsätzen bewiesen hat, beruhen auf der Achsen- oder Punktsymmetrie der Figur. Die Symmetrie einer Figur lässt sich aber nur mit Hilfe von Abbildungen, nicht jedoch mit Hilfe von Kongruenzsätzen beweisen.

Argumente contra
Um die Abbildungsmethode anwenden zu können, muss man erst geeignete Abbildungen finden und deren Eigenschaften jeweils sehr genau kennen.

Die "Dynamik" der Abbildungen ist für Schüler nicht immer leicht nachzuvollziehen. Das "statische" Arbeiten der Kongruenzmethode erscheint hier einfacher.

Betrachtet man Schulbücher und Lehrpläne, so spielt die Abbildungsmethode heute in der **Unterrichtspraxis** keine große Rolle mehr.

Kapitel 3

So bestätigen auch **empirische Untersuchungen:**

Wenn Schüler die Beweismethode frei wählen können, bevorzugen sie in den meisten Fällen die Kongruenzmethode (vgl. Beckmann/Bettscheider 1993); Die korrekte Durchführung von Abbildungsbeweisen ist auch für Schüler am Gymnasium schwer zu erlernen, während die Kongruenzmethode zu einem wesentlich höheren Anteil "richtiger" und "fast richtiger" Beweise führt (vgl. Beckmann 1996).

Holland (1988, 69) fasst die **Gegenüberstellung von Kongruenz- und Abbildungsmethode** so zusammen:

Die **Abbildungsmethode** ist in allen Schularten der Sekundarstufe I dazu geeignet, um Symmetrien zu begründen und daraus Eigenschaften zu folgern.

Die **Kongruenzmethode** ist geeignet, um im Geometrieunterricht des Gymnasiums das Finden und Darstellen von Beweisen zu üben.

<u>Beispiele:</u>

Wie werden Kongruenz- und Abbildungsbeweise **in Schulbüchern** erläutert und gegenübergestellt? An welchen Sätzen werden sie demonstriert?

Man findet dabei **unterschiedliche Vorgehensweisen**:

Derselbe Satz wird zweimal bewiesen: zunächst mittels "Kongruenzbeweis" und dann mittels "Spiegelungsbeweis". Anschließend werden die wesentlichen Schritte beider Beweisverfahren explizit in einem Kasten zusammengefasst.

Beispiel:

Satz: Wenn man in einem Parallelogramm ABCD von allen Eckpunkten aus gleich lange Strecken auf den Seiten im gleichen Umlaufsinn abträgt und die entstandenen Punkte miteinander verbindet, dann entsteht wieder ein Parallelogramm.

a) Kongruenzbeweis:

Vor.: (1) ABCD ist ein Parallelogramm
(2) $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$

Beh.: EFGH ist ein Parallelogramm

Bew.: 1. Wir betrachten ΔAEH und ΔCGF, um zu zeigen, daß $\overline{EH} = \overline{FG}$ gilt.

2. $\overline{AE} = \overline{CG}$ (Vor (2))
$\overline{AH} = \overline{CF}$ (nach Satz vom Parallelogramm und Vor (2): $\overline{AD} - \overline{HD} = \overline{BC} - \overline{BF}$)
$\sphericalangle EAH = \sphericalangle GCF$ (Folgerung aus dem Satz vom punktsymmetrischen Viereck)
$\sphericalangle AEH \cong \Delta CGF$ (SWS)

3. $\overline{EH} = \overline{GF}$ (Entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken)
Entsprechend zeigen wir: $\overline{EF} = \overline{GH}$
Da $\overline{EH} = \overline{GF}$ und $\overline{EF} = \overline{GH}$ gilt, ist das Viereck EFGH nach dem Satz vom Parallelogramm ebenfalls ein Parallelogramm.

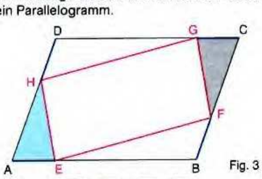


Fig. 3

b) Spiegelungsbeweis:

Vor.: (1) ABCD ist ein Parallelogramm
(2) $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = r$

Beh.: EFGH ist ein Parallelogramm

Bew.: Wir werden zeigen, daß das Viereck EFGH punktsymmetrisch ist.

1. Sei Z das Symmetriezentrum des Parallelogramms ABCD, so gilt für S_Z:

2. $[AB] \to [CD]$
$k(A;r) \to k(C;r)$ ($A \to C$ und Vor (2))
$[AB] \cap k(A;r) \to [CD] \cap k(C;r)$ (Satz von den symmetrischen Schnitten)
$E \to G$ (Vor (2))
Entsprechend zeigen wir: $F \to H$

3. Da $E \to G$ und $F \to H$ ist das Viereck EFGH punktsymmetrisch. Nach dem Satz vom punktsymmetrischen Viereck ist EFGH ein Parallelogramm.

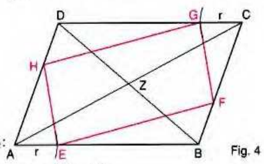


Fig. 4

Schritte beim **Kongruenzbeweis**:	Schritte beim **Spiegelungsbeweis**:
1. Aufsuchen geeigneter Dreiecke	1. Aufsuchen einer geeigneten Symmetrieachse (oder Symmetriezentrums).
2. Nachweisen der Kongruenz der Dreiecke mit einem Kongruenzsatz	2. Nachweisen der Symmetrie von Punkten (Geraden, Strecken) mit der Abbildungsvorschrift oder dem Satz von den symmetrischen Schnitten (Verbindungen).
3. Folgern der Behauptung aus der gleichen Länge (Größe) entsprechender Strecken (Winkel).	3. Folgern der Behauptung aus der Symmetrie entsprechender Punkte, Strecken und Winkel.

Quelle: Lambacher /Schweizer, Geometrie Bayern 8

Kapitel 3

Die beiden Beweisverfahren werden zunächst am selben Satz erläutert, später aber nochmals **an zwei verschiedenen Sätzen** demonstriert.

Voraussetzung:
Das Dreieck *ABC* ist gleichschenklig. *M* liegt auf seiner Symmetrieachse und ist Mittelpunkt eines Kreises wie in Bild 100.4.
Behauptung: Die Strecken [*DE*] und [*FG*] sind gleich lang.
Beweis (vgl. Bild 100.5):
Da der Mittelpunkt *M* des Kreises *k* auf der Symmetrieachse *s* des Dreiecks *ABC* liegt, wird der Kreis wie das Dreieck *ABC* bei der Spiegelung an der Achse *s* auf sich abgebildet. Die Schnittpunkte *D* und *F* sowie *E* und *G* des Kreises mit den Schenkeln des Dreiecks werden daher wechselseitig aufeinander abgebildet.

$$D \xmapsto{s} F$$
$$E \xmapsto{s} G$$
$$[DE] \xmapsto{s} [FG]$$

Also: $\overline{DE} = \overline{FG}$
(vgl. Satz 5 der Satzgruppe der Achsenspiegelung Seite 9).

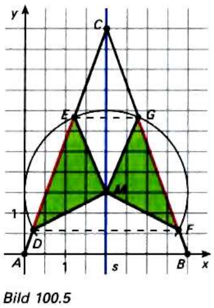


Bild 100.5

Quelle Mathematik für Realschule 8

In Bild 101.4 ist das Parallelogramm *ABCD* gezeichnet. Auf seinen Seiten sind gleich lange Strecken [*AE*], [*DH*], [*CG*] und [*BF*] abgetragen. Wir zeigen, daß das Viereck *EFGH* ein Parallelogramm ist.

Voraussetzung:
Das Viereck *ABCD* ist ein Parallelogramm und es gilt $\overline{AE} = \overline{DH} = \overline{CG} = \overline{BF}$.

Behauptung:
Das Viereck *EFGH* ist ein Parallelogramm.

Beweis:
$\overline{AE} = \overline{CG}$
$\overline{AF} = \overline{CH}$
$\sphericalangle FAE = \sphericalangle HCG$
$\triangle AFE \cong \triangle CHG (sws)$
Also: $\overline{EF} = \overline{GH}$

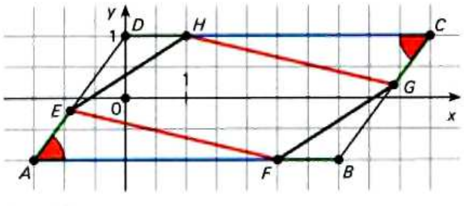
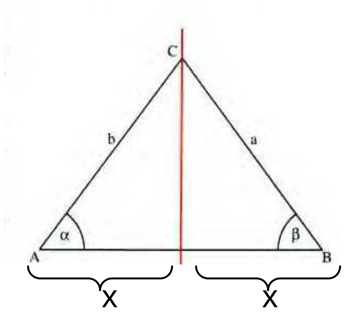


Bild 101.4



$\alpha = \beta$

Zunächst wird der **Satz** durch einen Abbildungsbeweis ("mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen") und anschließend der **Kehrsatz** durch einen Kongruenzbeweis ("mit Hilfe von Kongruenzbetrachtungen") bewiesen.

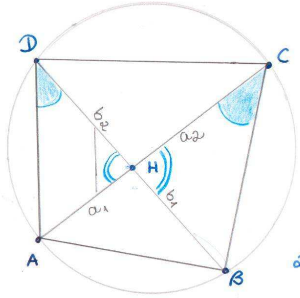
Beweis: wenn ein Dreieck gleichschenklig ist dann besitzt es zwei gleich große Winkel.

→ Symmetrieachse

Klassisches Beispiel für den Kongruenzbeweis: Jedes Dreieck hat einen Umkreis (Schwerpunkt)

Konkretes Beispiel für den Ähnlichkeitsbeweis :

1. Hieraus kann man auf gleich große Winkel oder Verhältnisse von Streckenlängen schließen.



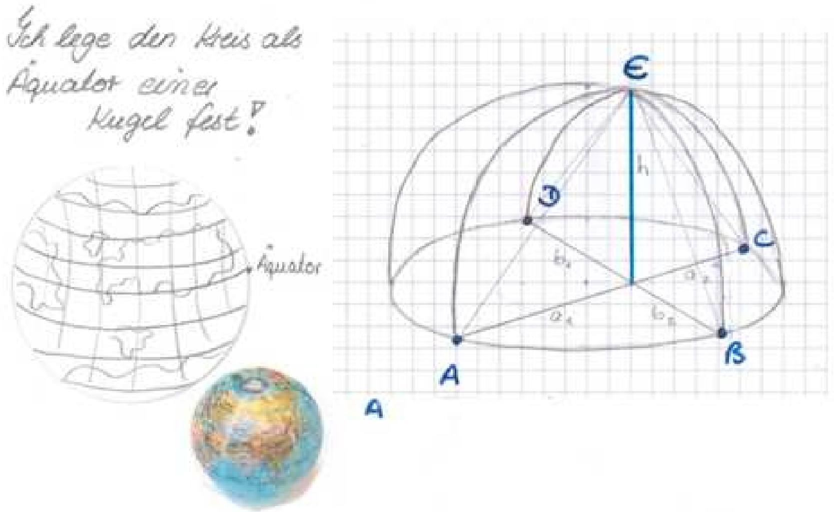
SEHNENSATZ:
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

z.z.: ΔAHD ähnlich zu ΔBHC

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ (Umfangs∢satz)
$\sphericalangle AHD = \sphericalangle BHC$ (Scheitel∢)
$\Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta BHC$ (ähnlich)

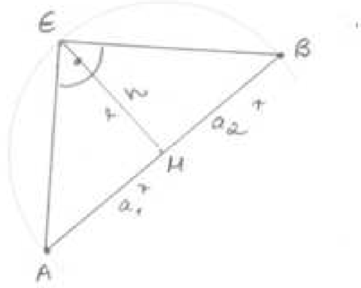
Kapitel 3

2. Verlassen der Bezugsebene 2D→ 3D



$$h^2 = a_1 \cdot a_2$$
$$h^2 = b_1 \cdot b_2$$

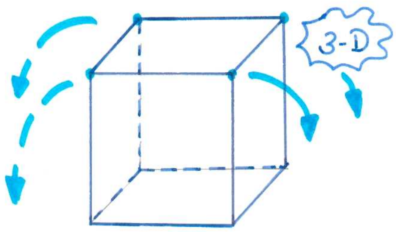
Wichtig !!
- Satz des Thales
- Satz des Pythagoras



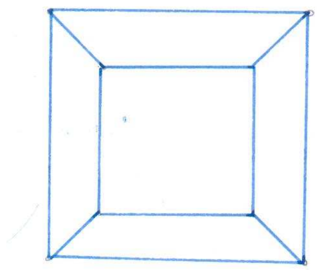
→ EULERSCHE POLYEDERSATZ

im Raum

$\underbrace{E}_{\text{ECKEN}} - \underbrace{K}_{\text{KANTEN}} + \underbrace{F}_{\text{FLÄCHEN}} = 2$



in der Ebene



$E - K + F = 1$

Kapitel 3

3.2. Theorie

3.2.1. Die Rolle des Beweisens und Argumentierens im Mathematikunterricht

Aus Sicht der Fachwissenschaft Mathematik

Will man die Rolle des Beweisens und Argumentierens im Mathematikunterricht analysieren, ist es hilfreich, zunächst einen Blick in die **Fachwissenschaft Mathematik** zu werfen:

a) Welche **Bedeutung** besitzen Beweise in der Fachwissenschaft Mathematik? In welcher Form werden korrekte mathematische Beweise dargestellt?
b) Welche **Kategorien** von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik kann man unterscheiden?

a) Welche **Bedeutungen** besitzen Beweise?

1. Warum wird in der Mathematik überhaupt bewiesen? Die Antwort auf diese sehr grundsätzliche Frage zeigt zwei - miteinander zusammenhängende - Aspekte des Beweisens auf:

- **Sicherung von Wissen**: Ein Beweis bestätigt zunächst, dass eine Behauptung gilt. Dabei wird insbesondere sichtbar, unter welchen Voraussetzungen und warum sie gilt.

  Fischer/Malle (1985, 189) bezeichnen diesen Aspekt als **demonstrative Funktion von Beweisen**: "In dieser Funktion sind Beweise Mittel zur Darstellung, Ordnung und Sicherung mathematischen Wissens. Kraft dieser Funktion können Beweise Mittel des rationalen Argumentierens und Überzeugens sein."

- **Ordnung von Wissen**: Durch Beweise werden einzelne Begriffe miteinander verknüpft und in einen größeren Rahmen eingeordnet. Es entsteht letztlich eine geschlossene Theorie als Vernetzung der Begriffe eines mathematischen Teilgebietes.

  Fischer/Malle (1985, 189) bezeichnen diesen Aspekt als **explorative Funktion von Beweisen**: "In dieser Funktion sind Beweise Mittel zum Erkennen und Erforschen von Zusammenhängen. Damit sind Beweise insbesondere Mittel zur Entwicklung von Begriffen."

→ allgemeine **Lernziele:**
- Assoziationsketten
- Disskrimination
- Mathematische Begriffe werden neu gebildet

Kapitel 3

- Vorstellung und Verständnis mathematischer Regeln /Sätze
- Probleme lösen

Schülerempfinden:

- Kommunikationsproblem / Ungenauigkeit.
- Beim Beweisen lernt man praktizieren / logisches Denken.
- Schüler haben häufig Probleme beim Argumentieren.
- Keine verschiedenen Standpunkte – die Schüler erwarten eine eindeutige Lösung.

2. An Beweise werden in der Fachwissenschaft Mathematik üblicherweise folgende Ansprüche gestellt:

- **Lückenlosigkeit** und **Vollständigkeit**: Ein Beweis sollte mit Hilfe der logischen Schlussregeln lückenlos und vollständig darlegen, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen sowie den Axiomen und schon bewiesenen Aussagen folgt. .

- **Minimalität**: Ein Beweis sollte sich nur auf diejenigen Voraussetzungen stützen, die für die Gültigkeit der Behauptung unbedingt nötig sind. Ferner sollten auch die einzelnen Argumentationsschritte wirklich nötig sein im Sinne der Vollständigkeit und Lückenlosigkeit.

- **Formalisierung** von Struktur, Sprache und Symbolik: Beweise werden in der Regel in einer formalisierten Struktur ("Voraussetzung -Behauptung -Beweis") präsentiert. Die verwendete Fachsprache ist ebenfalls formalisiert und damit sehr präzise (z.B. "es existiert ein" versus " es existiert genau ein" oder "zwei gegenüberliegende Seiten" versus "je zwei gegenüberliegende Seiten"). Häufig wird diese Fachsprache auch mit Hilfe von Symbolen (z.B. Quantoren) schriftlich dargestellt.

  → Deshalb ist es im Hinblick auf den Mathematikunterricht hilfreich, zu unterscheiden zwischen der **Beweisfindung**, einem kreativen und problemlösenden Prozess, der nicht selten unregelmäßig und sprunghaft verläuft, mit Rückschlägen einerseits und plötzlichen Erfolgen andererseits und der anschließenden **Beweisdarstellung**, die obigen Kriterien genügen muss.

<u>b) Welche **Kategorien** von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik kann man unterscheiden?</u>

1. Geometrische Beweise lassen sich dahin gehend unterscheiden, welchem mathematischen Teilgebiet die **verwendeten Beweismittel** entstammen:

- **Kongruenzbeweise** stützen sich auf die Kongruenzsätze für Dreiecke: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Kongruenz. Hieraus kann man auf gleich große Winkel oder gleich lange Strecken schließen.

Kapitel 3

Ähnlichkeitsbeweise stützen sich auf die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke: Man sucht in der Figur Paare von Teildreiecken und zeigt deren Ähnlichkeit.

- Bei **Abbildungsbeweisen** wendet man eine Kongruenzabbildung oder Ähnlichkeitsabbildung auf eine Figur oder eine Teilfigur an und folgert die Längen- bzw. Winkelgleichheiten bzw. -verhältnisse aus den Eigenschaften dieser Abbildung.

Für die Mittelstufengeometrie sind insbesondere Kongruenz- und Abbildungsbeweise (auf der Basis von Kongruenzabbildungen) wichtig.

2. Geometrische Beweise lassen sich nach der **Art der Beweisführung** unterscheiden:

- **Direkter Beweis**: Es wird eine unmittelbare und direkte Argumentationskette von den Voraussetzungen zur Behauptung aufgebaut, unter Einbeziehung bekannter Axiome oder Sätze.
- Ein **indirekter Beweis** oder **Widerspruchsbeweis** wird geführt, indem man - zusätzlich zu den Voraussetzungen - die Verneinung der Behauptung annimmt und zeigt, dass diese Annahme letztlich in einen Widerspruch zu den Voraussetzungen mündet.

In **anderen Teilgebieten der Mathematik** kommen **weitere Möglichkeiten** der Beweisführung hinzu (z.B. Beweis durch vollständige Induktion in der Analysis).

3. Geometrische Beweise lassen sich nach der **Struktur der Behauptung** unterscheiden:

- Bei einem **Existenzbeweis** ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert.
- Bei einem **Eindeutigkeitsbeweis** ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen höchstens ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert (der Nachweis der Existenz dieses Objekts ist dann nicht Bestandteil des Beweises). Eindeutigkeitsbeweise werden nicht selten als Widerspruchsbeweise geführt: Man nimmt an, dass zwei verschiedene Objekte mit den geforderten Eigenschaften existieren und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.
- Ein **Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis** ist die Kombination beider: Es ist zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen genau ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert.

3.3. Beispiele

Die Beispiele, überwiegend aus Schulbüchern, zeigen verschiedene Möglichkeiten auf, wie das **Beweisen als Tätigkeit** gelehrt wird, wie **neue Sätze bewiesen oder begründet** werden und wie das **Begründen von Aussagen durch Aufgaben** angeregt wird.

Kapitel 3

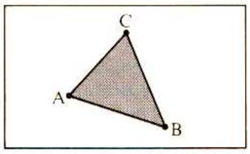
- **Lehren des Beweisens im Rahmen der Viereckslehre**: Zunächst wird "die besondere Form mathematischer Sätze", die wenn-dann-Form, beschrieben, dann werden Satz und Kehrsatz sowie notwendige und hinreichende Voraussetzungen unterschieden. Sprache und Symbolik orientieren sich an der Fachwissenschaft Mathematik.
- **Begründung mathematischer Sätze**: Die "Begründung" beinhaltet eine Argumentationskette, die in einfacher und schülergemäßer Sprache formuliert ist. Auf die formale Struktur, Sprache und Symbolik mathematischer Beweise wird verzichtet.

Begründungen

in Klasse 8:

Aufgabe 1 *Schnittpunkt der Mittelsenkrechten*

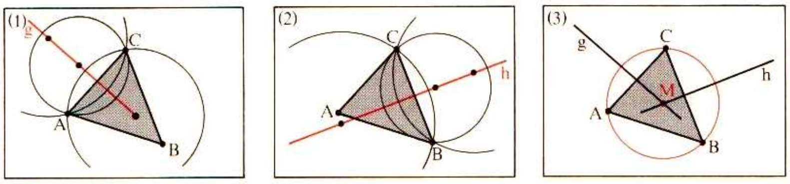
Gegeben ist ein Dreieck ABC.
a) Zeichne einen Kreis, der durch die drei Eckpunkte des Dreiecks geht.
b) Beweise die Richtigkeit der Konstruktion.



Lösungshinweis:
Zeichne zuerst Kreise, die nur durch die beiden Punkte A und B [B und C] gehen. Wo liegen deren Mittelpunkte?

Lösung

a) *Vorüberlegung:*

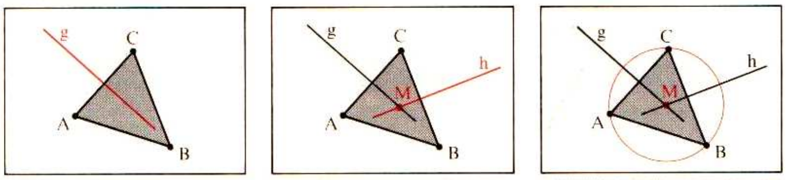


Auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ liegen die Mittelpunkte der Kreise, die durch A und C gehen.

Auf der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ liegen die Mittelpunkte der Kreise, die durch B und C gehen.

Der Schnittpunkt beider Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Konstruktion:



Zeichne die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$; nenne sie g.

Zeichne die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{BC}$; nenne sie h. Den Schnittpunkt von g und h nenne M.

Zeichne den Kreis um M durch den Punkt A.

b) *Beweis:*
Da M auf g liegt, gilt $|MA| = |MC|$. Da M auf h liegt, gilt $|MB| = |MC|$.
Wegen $|MA| = |MC|$ und $|MB| = |MC|$ gilt $|MA| = |MB| = |MC|$.
Also geht der Kreis durch alle drei Punkte.

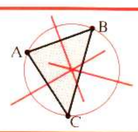
Definition: Man nennt den Kreis durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks den **Umkreis** des Dreiecks.

Zum Weiterdenken

(1) Für die Mittelsenkrechte g einer Strecke $\overline{AB}$ gilt:
(M 1) Wenn $P \in g$, dann $|AP| = |BP|$. (M 2) Wenn $|AP| = |BP|$, dann $P \in g$.
Welche der beiden Eigenschaften wurde zur Begründung der Richtigkeit der Konstruktion benutzt?

(2) Was kannst du über die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ in Aufgabe 1 aussagen? Begründe mit Hilfe der Eigenschaft (M 2), daß diese Mittelsenkrechte ebenfalls durch den Mittelpunkt M des Umkreises geht.

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt.
Dieser ist der Mittelpunkt des Umkreises.



(Mathematik heute Gymnasium; Ausgabe Baden-Württemberg 8 ;1980 Schroedel)

Kapitel 3

- **"Begründung" statt "Beweis"**: In Aufgaben werden mehrfach "Begründungen" verlangt, jedoch nie "Beweise". Diese schließen sich stets an vorbereitende Rechnungen an und vertiefen oder verallgemeinern einen Sachverhalt oder fordern problemlösendes Denken.

- **Aufgabensequenz zur Erarbeitung einer Begründung**: Die wesentliche Idee einer Aufgabensequenz wird vorab erläutert. An schon gelösten Aufgaben wird ein Satz vorbereitet, der dann allgemein formuliert wird.

- **Unbeschriftete Abfolge von Beweisschritten**: Schülerinnen und Schüler sollen einzelne Beweisschritte wiedergeben, ergänzen und kritisch betrachten (Begründung der Beweisschritte und Präzisierung in formaler Hinsicht).

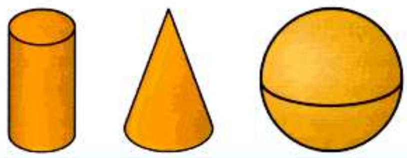
Begründungen in Klasse 5:

Auch im Geometrieunterricht in Klasse 5 werden von Schülerinnen und Schülern schon Begründungen gefordert. Sie können sich auch an experimentelle (oder anderweitige vorbereitende) Aktivitäten anschließen und besitzen teilweise auch problemlösenden Charakter.

Quelle: Mathematik Neue Wege 5 (Lergenmüller / Schmidt 2000, 134 und 135)

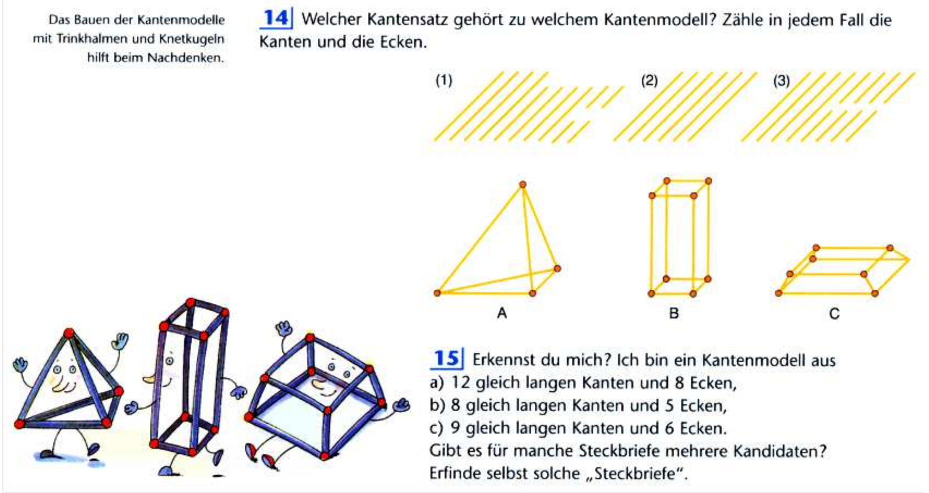
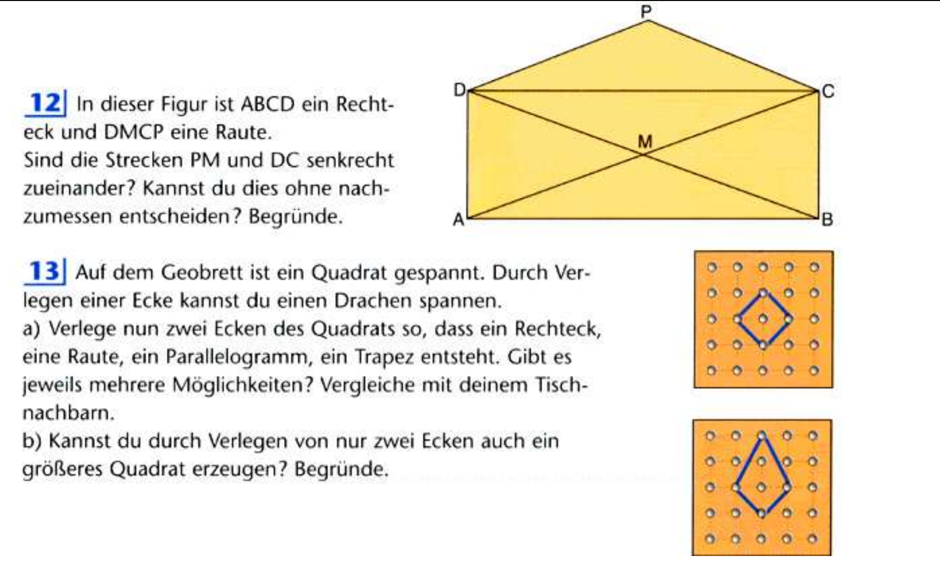
11 Körper und Flächen sind auf der vorigen Seite getrennt voneinander abgebildet. Wir untersuchen nun, welche Flächen man zum Aufbau bestimmter Körper benötigt. Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus.

Körper	Welche Flächen?	Wie viele Flächen?	Gleiche Flächen?
Quader	Rechtecke	6	je 2 gegenüberliegende Rechtecke
Würfel	■	■	■
Dreieckiges Prisma	■	■	■
Quadratische Pyramide	Quadrat Dreiecke	1 4	■



15 In der Tabelle zu Aufgabe 11 sind die Körperformen Zylinder, Kegel und Kugel nicht aufgeführt. Weißt du warum? Schreibe die Begründung möglichst kurz und klar auf.

Kapitel 3

Quelle: Mathematik Neue Wege 5 (Lergenmüller / Schmidt 2000, 142)	 Das Bauen der Kantenmodelle mit Trinkhalmen und Knetkugeln hilft beim Nachdenken. **14** Welcher Kantensatz gehört zu welchem Kantenmodell? Zähle in jedem Fall die Kanten und die Ecken. **15** Erkennst du mich? Ich bin ein Kantenmodell aus a) 12 gleich langen Kanten und 8 Ecken, b) 8 gleich langen Kanten und 5 Ecken, c) 9 gleich langen Kanten und 6 Ecken. Gibt es für manche Steckbriefe mehrere Kandidaten? Erfinde selbst solche „Steckbriefe“.
Quelle: Mathematik Neue Wege 5 (Lergenmüller / Schmidt 2000, 157)	 **12** In dieser Figur ist ABCD ein Rechteck und DMCP eine Raute. Sind die Strecken PM und DC senkrecht zueinander? Kannst du dies ohne nachzumessen entscheiden? Begründe. **13** Auf dem Geobrett ist ein Quadrat gespannt. Durch Verlegen einer Ecke kannst du einen Drachen spannen. a) Verlege nun zwei Ecken des Quadrats so, dass ein Rechteck, eine Raute, ein Parallelogramm, ein Trapez entsteht. Gibt es jeweils mehrere Möglichkeiten? Vergleiche mit deinem Tischnachbarn. b) Kannst du durch Verlegen von nur zwei Ecken auch ein größeres Quadrat erzeugen? Begründe.

Kapitel 3
Weitere durchgenommene Beweise aus der Veranstaltung:

1. $\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = konstant$

Anleitung:

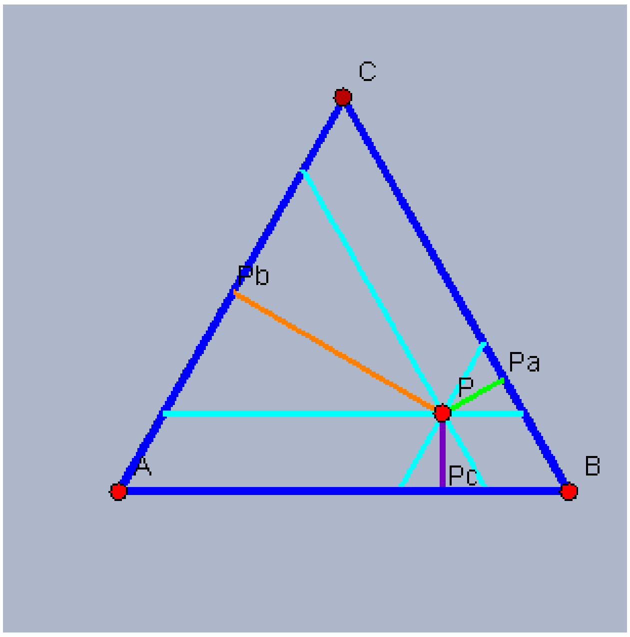
Beweis: Zu beweisen ist:

$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = \text{konstant}$$

Die gesuchte Abstandssumme ist gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks und damit konstant.

Folgende Überlegungen können bei der Beweisfindung helfen:

- Zeichnen Sie die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch P ein. Welche Eigenschaften haben die dadurch entstehenden Teildreiecke?
- Welche Rolle spielen $[PP_a]$, $[PP_b]$ und $[PP_c]$ in diesen Teildreiecken?



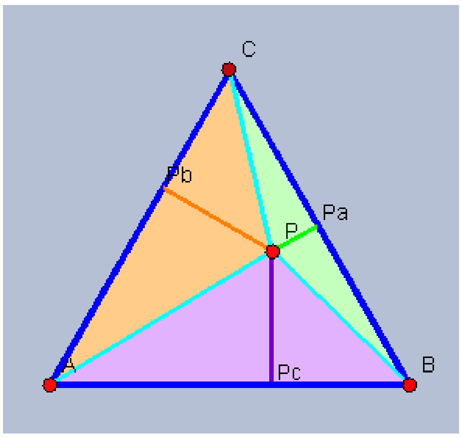
1. Beweis:

1. Möglichkeit: **Symbolischer Beweis**
   Dieser beinhaltet die Zerlegung der Dreiecksfläche in Teilflächen.

Beweis: Zu beweisen ist:

$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = konstant$$

Die gesuchte Abstandssumme ist gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks und damit konstant. Dazu betrachtet man die drei Teildreiecke APB, APC und BPC:
Addiert man einerseits die Flächeninhalte der drei Teildreiecke, so erhält man:



$$I_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PP_a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PP_b} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{PP_c} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c}\right)$$

Betrachtet man andererseits das Dreieck ABC als Ganzes, so erhält man:

Kapitel 3

$$I_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right)$$

Ein Vergleich beider Terme liefert:

$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = h = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Anmerkung:

Im Beweis lassen sich zwei grundlegende heuristische Prinzipien erkennen:

Die Behauptung erfordert eigentlich "nur", zu zeigen, dass die Summe der Abstände unabhängig von der Lage von P ist. Im Beweis wird "mehr" gezeigt, nämlich dass diese Summe gleich der Höhe des Dreiecks ist. Obwohl der Beweis "mehr" beweist als erforderlich, ist er einfacher zu führen als ein reiner Invarianzbeweis.

Das Betrachten von Spezialfällen (hier: P fällt mit einem der Eckpunkte des Dreiecks zusammen) hilft dabei, eine Vergleichsgröße für die Invarianz der Abstandssumme zu finden (hier: die Höhe h des Dreiecks).

2. <u>Möglichkeit: **Ikonischer Beweis**</u>
   <u>Dieser Beweis beruht auf einer geschickten Zusammensetzung der drei Abstände.</u>

Beweis: Zu beweisen ist:

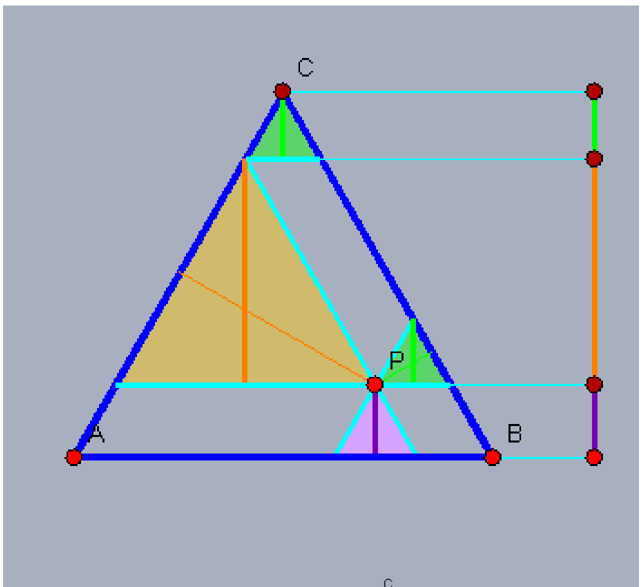
$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = \text{konstant}$$

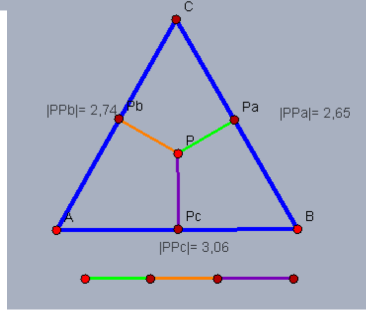
Die gesuchte Abstandssumme ist gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks und damit konstant.

Der Beweis umfasst vier wesentliche Schritte:

- Alle vier farbig markierten Teildreiecke sind gleichseitig und damit ähnlich.
- Die beiden grünen Teildreiecke sind kongruent.
- Die farbig hervorgehobenen Strecken sind jeweils die Höhen dieser gleichseitigen Dreiecke.
- Addiert man die Höhen der drei unterschiedlich gefärbten Teildreiecke, so erhält man:

$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = h = a \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$



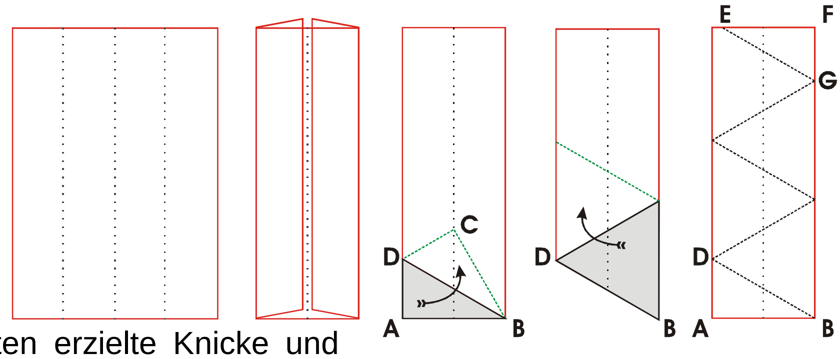


Kapitel 3

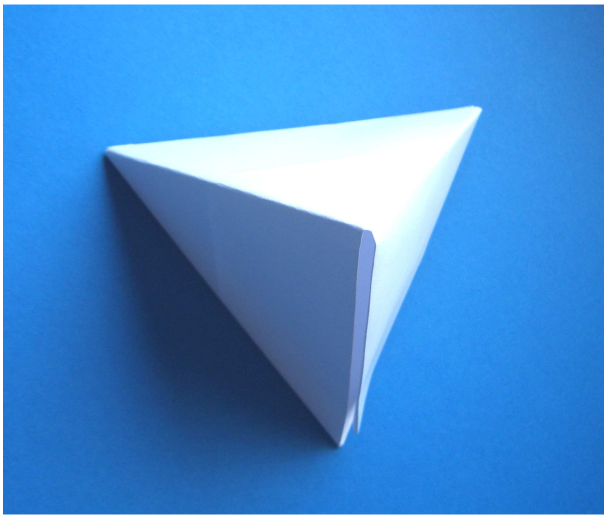
2. Falten eines Tetraeders

Faltanleitung für einen Tetraeder

Falten Sie ein DIN-A4 Blatt der Länge nach so, dass vier gleich breite Parallelstreifen entstehen. Dann klappen Sie die beiden äußeren Viertelstreifen nach innen, so dass de facto ein der Länge nach halbiertes DIN-A4 Blatt vor Ihnen liegt. Jetzt falten Sie die Ecke A so nach oben, dass diese auf der Mittellinie zu liegen kommt, also auf dem Punkt C. Nun längs der Kante DC falten, so dass die Ecke B auf der Kante AD zu liegen kommt. Diesen Vorgang wiederholen Sie noch zweimal. Wenn Sie das Blatt wieder auffalten, erkennen Sie (fast) vier gleichseitige Dreiecke sowie zwei Randdreiecke ABD und EFG. Falten Sie nun längs der durch das Falten erzielte Knicke und stecken Sie das Dreieck ABD in die Lasche bei EFG. Sie erhalten ein gleichseitiges Tetraeder.



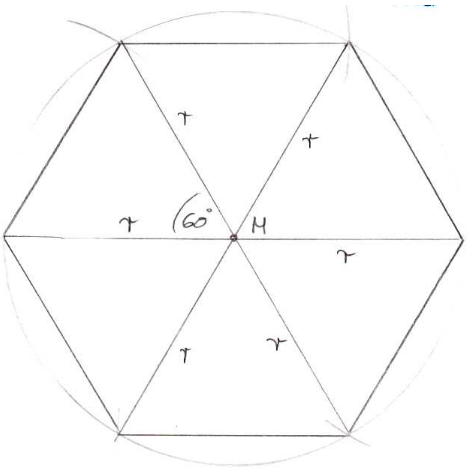
Ergebnis:

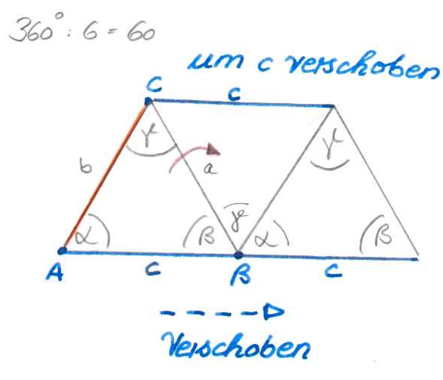


Kapitel 3

3. Warum passt der Radius 6mal auf die Kreislinie?

<u>Ikonischer Beweis:</u>





<u>Voraussetzung:</u>

- Vollwinkel = 360°
- Winkelsumme im Dreieck
- bzw. gleichseitige Dreiecke

Aufgrund der Symmetrie des Kreises bestätigt sich, dass der Radius 6mal auf die Kreislinie passt!

<u>Enaktiver Beweis</u>: Warum berühren sich 7 Münzen

Bsp.: