Vorlesungsskript “Stochastische Analysis mit Finanzmathematik”

Christoph Kühn

Verweise in den Lehrvideos vom Wintersemester 2020/21 beziehen sich auf diese Version des Skripts, die nicht die aktuellste ist

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **1**

2 Allgemeines zu stochastischen Prozessen **5**
2.1 Martingale 10

3 Stochastische Integration **18**
3.1 Fortsetzung des Elementarintegrals 20
3.2 Quadratische Variation eines Semimartingals 41
3.3 Die Itô-Formel und einige Anwendungen 48
3.4 Maßwechsel 54

4 Modellierung arbitragefreier Finanzmärkte **63**
4.1 Das Black-Scholes-Modell 67
4.1.1 Lösung der Black-Scholes Differentialgleichung 69
4.1.2 Formaler Beweis der Replizierbarkeit von $g(S_T^1)$ 73
4.2 Lokales Volatilitätsmodell 80
4.3 Stochastische Volatilitätsmodelle 82
4.4 Sprungrisiko 83
4.5 Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) 84

A Anhang: Lebesgue-Stieltjes-Integral **90**

B Anhang: vorhersehbare Prozesse **93**

C Anhang: Konvergenzbegriffe in der Stochastik **98**

D Anhang: Ergänzende Überlegungen **101**

1 Motivation

In dieser Vorlesung wollen wir uns mit *zeitstetiger* Finanzmathematik beschäftigen. D.h. Zeitbereich $= [0, T]$ statt wie in der diskreten Vorlesung Zeitbereich $= \{0, 1, \ldots, T\}$.

Aktienpreisprozess

$$S : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}, \quad S = (S_t)_{t \in [0,T]}.$$

Der Einfachheit halber existiere ein risikoloser ,,Bond" ohne Verzinsung, d.h.

$$S_t^0 = 1 \quad \text{für alle } t$$

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass die Pfade $t \mapsto S_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ **stetig** sind. Ein wichtiges Beispiel ist die **Brownsche Bewegung**. P-fast alle Pfade einer Brownschen Bewegung (BB) sind nirgends differenzierbar. Einen Anhaltspunkt hierfür liefert bereits die Skalierungseigenschaft der BB: Für den zufälligen Differenzenquotienten gilt ,,in Verteilung"

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\sqrt{h} B_1}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} B_1, \qquad h > 0$$

und $P(B_1 \neq 0) = 1$. Lässt man für ein festes t den Abstand h gegen Null laufen, so explodiert der Differenzenquotient ,,in Verteilung". Natürlich widerlegt das noch nicht die Differenzierbarkeit in t, da man hierfür für einen festen Pfad das Verhalten des Differenzenquotieten für verschiedene h kontrollieren muss (eine Erweiterung obiger Überlegung zu einem formalen Beweis für festes t findet sich z.B. in Mörters und Peres [3]).

Die Nicht-Differenzierbarkeit der Aktienpreispfade ist eine sinnvolle Eigenschaft: wären die Pfade stetig differenzierbar (und nicht identisch Null), so ließe sich eine ,,risikolose Gewinnmöglichkeit erzielen (wie ?).

Ein wichtiges Thema der Vorlesung wird die Bewertung und Absicherung von Optionen sein. Folgende Überlegungen zeigen, dass auch hier die Nicht-Differenzierbarkeit der Aktienpreispfade eine zentrale Rolle spielt.
Call-Option: Halter erwirbt zum Zeitpunkt 0 das Recht, zum Zeitpunkt T *eine* Aktie zum festgelegten Preis $K \in \mathbb{R}_+$ zu erwerben. Die zufällige Auszahlung zum Zeitpunkt T des Calls ist demnach

$$H(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+ = \max\{S_T(\omega) - K, 0\}$$

Nehme an, dass die Option zum Zeitpunkt 0 ,,aus dem Geld" sei, d.h. $S_0 < K$.

Wieviel ist die Call-Option zum Zeitpunkt 0 wert und wie kann sich der Verkäufer gegen die Optionsauszahlung absichern ?

Naive Lösung für Absicherung (,,Hedging") der Option:

Starte ohne Kapital (beachte, dass $S_0 < K$). Wenn S_t den Preis K erreichen sollte, kaufe man sogleich *eine* Aktie zum Preis K (stets möglich, da Aktienpreisprozess stetig) und man verschulde sich dafür um K Bonds. Wenn S_t wieder kleiner werden sollte als K, verkaufe man die Aktie wieder zum Preis K und löse damit seine Verschuldung im Bond auf. Bei weiteren Überquerungen von K verfahre man genauso. Formal entspricht dies der Handelsstrategie (φ^0, φ) mit

$$\varphi_t(\omega) := \begin{cases} 1 & : \quad \text{wenn } S_t(\omega) \geq K \\ 0 & : \quad \text{wenn } S_t(\omega) < K \end{cases} \tag{1.1}$$

und

$$\varphi_t^0(\omega) := \begin{cases} -K & : \quad \text{wenn } S_t(\omega) \geq K \\ 0 & : \quad \text{wenn } S_t(\omega) < K, \end{cases} \tag{1.2}$$

wobei φ_t die Anzahl an Aktien und φ_t^0 die Anzahl an Bonds im Portfolio zum Zeitpunkt t bezeichne.

Da $S_0 < K$ ist der Startwert des Portfolios $= \varphi_0^0 \cdot 1 + \varphi_0 \cdot S_0 = 0 + 0 = 0$ und der zufällige Endwert $= \varphi_T^0(\omega) \cdot 1 + \varphi_T(\omega) \cdot S_T(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$.

Die Option kann demnach **ohne Startkapital** repliziert werden und ist folglich nach der Arbitragetheorie wertlos.

Dies widerspricht offenbar den Beobachtungen auf Derivatemärkten, wonach Optionen nicht-verschwindende Preise haben (auch wenn sie ,,aus dem Geld" starten, d.h. wenn $S_0 < K$). Mit Hilfe der **Stochastischen Analysis** werden wir obige ,,Hedging-Strategie", die ja auf den ersten Blick durchaus plausible erscheint, näher unter die Lupe nehmen und schließlich zum Wanken bringen.

Wenn S etwa eine Brownsche Bewegung ist, wird das starke Flattern des Aktienpreisprozesses, wenn er gerade bei K ist, ein ständiges (verlustfreies) Kaufen- und Verkaufen zum Preis K auch näherungsweise unmöglich machen und der Strategie zum Verhängnis werden.

Einen ersten Hinweis darauf mag die folgende Überlegung liefern: Um die Strategie (1.1)/(1.2) auf ein etwas solideres Fundament zu stellen, wandeln wir sie wie folgt ab. Sei $\varepsilon > 0$ mit $S_0 < K - \varepsilon$.

Wenn S_t den Preis $K+\varepsilon$ erreichen sollte, kaufe man sogleich *eine* Aktie zum Preis $K+\varepsilon$ und man verschulde sich dafür um $K+\varepsilon$ Bonds. Wenn danach S_t kleiner werden sollte als $K-\varepsilon$, verkaufe man die Aktie wieder zum Preis $K-\varepsilon$ und löse damit seine Verschuldung in Bonds bis auf 2ε wieder auf. Bei weiteren Überquerungen des Intervalls $[K-\varepsilon, K+\varepsilon]$ verfahre man genauso. Formal:

$$\widetilde{\varphi}_t(\omega) := \begin{cases} 1 & : \quad \text{wenn } \sup\{u \le t \mid S_u(\omega) \ge K+\varepsilon\} > \sup\{u \le t \mid S_u(\omega) \le K-\varepsilon\} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\widetilde{\varphi}^0_t(\omega) := \begin{cases} -K-\varepsilon\cdot\#\{u \le t \mid \widetilde{\varphi} \text{ ändert seinen Wert in } u\} & : \quad \text{wenn } \widetilde{\varphi}_t = 1 \\ -\varepsilon\cdot\#\{u \le t \mid \widetilde{\varphi} \text{ ändert seinen Wert in } u\} & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese gezähmte Strategie hat den Vorteil, dass man wegen der Stetigkeit von $t \mapsto S_t(\omega)$ für festes $\varepsilon > 0$ und festes ω bis T nur endlich oft das Portfolio umschichten muss. Die Strategie ist wirklich selbstfinanzierend, was man von (1.1)/(1.2) i.A. nicht sagen kann. Das Problem bei der modifizierten Strategie ist aber, dass man bei jeder ,,Doppel-Überquerung" des Intervalls $[K-\varepsilon, K+\varepsilon]$ (also erst von unten nach oben und dann von oben nach unten) den Verlust 2ε macht. Man hat also neben dem Gewinn $(S_T-K)^+$ einen Verlust, der i.W.

$$2\varepsilon D(\varepsilon) \tag{1.3}$$

beträgt, wobei

$$D(\varepsilon) := \text{Anzahl der Doppel-Überquerungen des Intervalls } [K-\varepsilon, K+\varepsilon].$$

Wir betrachten nun zwei Fälle für den Preisprozess S.

Fall 1: Pfade von S sind von endlicher Variation (also z.B. stetig differenzierbar). Dann gilt

$$2\varepsilon D(\varepsilon) \to 0 \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Beweisskizze: Zu gegebener Fehlerschranke $\eta > 0$ existieren endlich viele Punkte $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ mit $t_l \in [0,T]$ s.d. sich die Variation $\sum_{l=1}^m |S_{t_l} - S_{t_{l-1}}|$ durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte um nicht mehr als $\eta > 0$ vergrößern lässt. Andererseits muss sich obige Variation bis auf den Betrag $2\varepsilon m$ aus dem Bereich $S \notin [K-\varepsilon, K+\varepsilon]$ speisen (und ist damit für den Betrag $4\varepsilon D(\varepsilon)$, also die Variation, die ausschließlich durch die Doppelüberquerungen erzeugt wird, erloren). Es folgt $4\varepsilon D(\varepsilon) \le 2\varepsilon m + \eta$. Wählt man nun $\varepsilon \le \eta/(2m)$ so folgt $4\varepsilon D(\varepsilon) \le 2\eta$ und damit die Behauptung.

Folge: Der Verlust (1.3) verschwindet asymptotisch (obwohl $D(\varepsilon) \to \infty$ möglich ist). Damit ist die Strategie (1.1)/(1.2) selbstfinanzierend.

Fall 2: S ist die Brownsche Bewegung.

Mit Methoden der Stochastischen Analysis kann man zeigen, dass für (φ^0, φ) aus (1.1)/(1.2) gilt

$$\varphi_t^0 + \varphi_t S_t \stackrel{\text{klar}}{=} (S_t - K)^+ = \underbrace{\int_0^t \varphi_u \, dS_u}_{\text{Handelsgewinne der Strategie } \varphi} + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t 1_{\{K-\varepsilon \le S_u \le K+\varepsilon\}} \, du,$$

wobei $\int_0^t \varphi_u \, dS_u$ das in stetiger Zeit noch zu konstruierende stochastische Integral ist, das die Handelsgewinne der Strategie φ modelliert*. Der Term $\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T 1_{\{K-\varepsilon \le S_u \le K+\varepsilon\}} \, du$ stimmt für $\varepsilon \to 0$ mit $2\varepsilon D(\varepsilon)$ überein (was an dieser Stelle nicht klar wird !). Da der Term für $\varepsilon \to 0$ zudem nicht verschwindet, ist (φ^0, φ) nicht selbstfinanzierend. Der Prozess $t \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{K-\varepsilon \le S_u \le K+\varepsilon\}} \, du$ wird **Lokalzeit** von S in K genannt.

---

*Man approximiere die Auszahlungsfunktion $x \mapsto (x-K)^+$ durch die glatten Funktionen f_ε, $\varepsilon \downarrow 0$, mit

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } x \le K - \varepsilon\,, \\ \frac{(x-K+\varepsilon)^2}{4\varepsilon} & : \quad \text{für } x \in (K-\varepsilon, K+\varepsilon) \\ x - K & : \quad \text{für } x \ge K + \varepsilon \end{cases}$$

bei denen die Ableitung zwischen $K-\varepsilon$ und $K+\varepsilon$ von 0 auf 1 linear ansteigt. Mit der noch herzuleitenden Itô-Formel gilt

$$\begin{aligned}
&(S_t - K)^+ \\
&\approx f_\varepsilon(S_t) \\
&= f_\varepsilon(S_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \left(f_\varepsilon(S_{tk/n}) - f_\varepsilon(S_{t(k-1)/n}) \right) \\
&\stackrel{\text{Taylor-Entwicklung}}{=} f_\varepsilon(S_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f'_\varepsilon(S_{t(k-1)/n})(S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n}) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f''_\varepsilon(S_{t(k-1)/n})(S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n})^2 \\
&= f_\varepsilon(S_0) + \int_0^t f'_\varepsilon(S_u) \, dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t f''_\varepsilon(S_u) \, du \\
&\approx f_\varepsilon(S_0) + \int_0^t \varphi_u \, dS_u + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t 1_{\{K-\varepsilon \le S_u \le K+\varepsilon\}} \, du.
\end{aligned}$$

Hierbei benutzt man die Lagrangesche Form des Restglieds: $f_\varepsilon(S_{tk/n}) = f_\varepsilon(S_{t(k-1)/n}) + f'_\varepsilon(S_{t(k-1)/n})(S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n}) + \frac{1}{2} f''_\varepsilon(\xi)(S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n})^2$ für ein ξ zwischen $S_{t(k-1)/n}$ und $S_{tk/n}$ und die Tatsache, dass für eine Brownsche Bewegung S gilt: $\sum_{k=1}^{\lfloor nu/t \rfloor} (S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n})^2 \to u$ für $n \to \infty$, $u \in [0, t]$. Die akkumulierten quadratischen Zuwächse der Brownschen Bewegung sind also endlich und stimmen mit der Länge des Zeitintervalls überein. Obige Taylor-Entwicklung kann noch nicht nach dem ersten Glied abgebrochen werden, da $\sum_{k=1}^n |S_{tk/n} - S_{t(k-1)/n}| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Des weiteren beachte man, dass sich φ_u und $f'_\varepsilon(S_u)$ nur auf der Menge $\{K - \varepsilon \le S_u \le K + \varepsilon\}$ unterscheiden und dort nur um maximal 1. Für $\varepsilon \downarrow 0$ wird der Fehler also durch das zweite Integral dominiert.

2 Allgemeines zu stochastischen Prozessen

Definition 2.1. *(1) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \subset \Omega$ nennen wir eine P-Nullmenge, wenn $A \in \mathcal{F}$ und $P(A) = 0$. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt* **vollständig**, *wenn jede Teilmenge einer P-Nullmenge Element aus $\mathcal{F}$ ist (und damit wegen Monotonie selber auch eine P-Nullmenge ist)*[†].

(2) Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zusammen mit einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Eine Filtrierung ist eine aufsteigende Familie von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $s \leq t$. $T \in \mathbb{R}_+$ ist der Zeithorizont des Modells. Zur Vereinfachung schreiben wir $\mathbb{F}$ für $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Interpretation: $\mathcal{F}_t$ steht für die Information, die wir zum Zeitpunkt t haben. $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt t bekannt ist, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

Bemerkung 2.2 (Vervollständigung eines Wahrscheinlichkeitsraums)**.** *Jeder Wahrscheinlichkeitsraum lässt sich vervollständigen. Zu einem i.A. nicht vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiere man das Mengensystem*

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{\widetilde{A} \subset \Omega \mid \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F} \text{ mit } A_1 \subset \widetilde{A} \subset A_2 \text{ und } P(A_2 \setminus A_1) = 0\}$$

und die Abbildung

$$\widetilde{P} : \widetilde{\mathcal{F}} \to [0, 1], \quad \widetilde{A} \mapsto P(A_1) = P(A_2).$$

Mit der Subadditivität und der Additivität für disjunkte Mengen des Maßes P rechnet man sofort nach, dass $\widetilde{\mathcal{F}}$ eine σ-Algebra ist. Zudem sieht man sofort, dass $\widetilde{P}(\widetilde{A})$ zwar von der Menge $\widetilde{A}$, nicht aber vom Paar $(A_1, A_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ abhängt, für das $A_1 \subset \widetilde{A} \subset A_2$ und $P(A_2 \setminus A_1) = 0$ gilt. Damit ist $\widetilde{P}$ wohldefiniert. Die σ-Additivität von $\widetilde{P}$ für disjunkte Mengen folgt dann wiederum aus der (Sub-)Additivität von P.

Offensichtlich ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P})$ vollständig. $\widetilde{\mathcal{F}}$ ist zudem die kleinste σ-Algebra mit der eine Vervollständigung möglich ist. Für $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ gilt nämlich, dass $\widetilde{A} \setminus A_1 \subset A_2 \setminus A_1$ und $P(A_2 \setminus A_1) = 0$. Damit muss $\widetilde{A} \setminus A_1$ in jeder vergrößerten σ-Algebra sein, die vollständig ist. Da A_1 es sowieso ist, muss auch die Vereinigung, also $\widetilde{A}$, in jeder vergrößerten vollständigen σ-Algebra sein.

Definition 2.3 (usual conditions). *Ein filtrierter vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ erfüllt die üblichen Voraussetzungen ("usual conditions"), wenn*

[†] Bei der gewählten Definition einer Nullmenge müssen Nullmengen notwendigerweise Elemente der σ-Algebra $\mathcal{F}$ sein. Eine alternative Definition lautet, dass $A \subset \Omega$ eine Nullmenge ist, wenn es eine Menge $B \in \mathcal{F}$ gibt mit $A \subset B$ und $P(B) = 0$. Bei der alternativen Nullmengendefinition verlangt Vollständigkeit, dass jede Nullmenge aus $\mathcal{F}$ ist. Offenbar sind beide Definitionen von Vollständigkeit des Wahrscheinlichkeitsraums äquivalent und wenn Vollständigkeit vorliegt sind auch die Definitionen für Nullmengen äquivalent.

(1) $\mathcal{F}_0$ alle P-Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält.

(2) die Filtration $\mathbb{F}$ rechtsstetig ist, d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{u\in(t,T]} \mathcal{F}_u$ für alle $t \in [0,T)$.

Definition 2.4. *Ein stochastischer Prozess ist eine Abbildung*

$$X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d.$$

Mit X_t bezeichnet man den **t-Schnitt** *von X, also die Abbildung*

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d, \ \omega \mapsto X(\omega,t).$$

X heißt **adaptiert**, *wenn für alle $t \in [0,T]$ die Abbildung X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

Die Abbildungen $t \mapsto X_t(\omega)$ werden als Pfade von X bezeichnet.

Definition 2.5. *Ein stochastischer Prozess X heißt càdlàg ("continu à droite, limites à gauche"), wenn alle seine Pfade rechtsstetig sind und die linken Limiten*

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) := \lim_{s\to t, s<t} X_s(\omega)$$

als Elemente in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^d$ existieren. In diesem Fall setzt man

$$X_{t-}(\omega) := \begin{cases} \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) & : \quad \text{für } t > 0\,, \\ X_0(\omega) & : \quad \text{für } t = 0 \end{cases} .$$

und $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

Es hat sich bewährt, Wertpapierpreisprozesse als càdlàg-Prozese zu modellieren.

Plötzliche Preisschocks können durch Sprünge abgebildet werden, die z.B. von einem Poissionprozess ausgelöst werden. Zudem kann ein zeitdiskreter Prozess $(\widetilde{X}_n)_{n=0,1,\ldots,T}$ durch

$$X_t(\omega) := \sum_{n=0}^{T} \widetilde{X}_n(\omega) 1_{[n,n+1)}(t), \quad t \in [0,T],$$

formal eingebettet und damit als Spezialfall angesehen werden.

Ausgeschlossen sind dagegen sog. Doppelsprünge, also $\lim_{s\uparrow t} X_s \neq X_t \neq \lim_{s\downarrow t} X_s$.

Proposition 2.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine càdlàg Funktion $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ hat höchstens endlich viele Sprünge, die dem Betrag nach größer als $\frac{1}{n}$ sind. $\{t \in [0,T] \mid \Delta f_t \neq 0\}$ ist abzählbar.*

Beweis. Nehme an, es gäbe unendlich viele $t \in [0,T]$ mit $|\Delta f_t| \geq \frac{1}{n}$.Dann besitzt die Menge $\{t \in [0,T] \mid |\Delta f_t| \geq \frac{1}{n}\}$ einen Häufungspunkt $t^\star$. Damit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Paar (t_1,t_2) mit $t^\star - \varepsilon < t_1 < t_2 < t^\star$ oder $t^\star < t_1 < t_2 < t^\star + \varepsilon$ und $|f_{t_2} - f_{t_1}| \geq 1/(2n)$ (wieso ?). Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass sowohl $\lim_{s\uparrow t^\star} f_s$ als auch $\lim_{s\downarrow t^\star} f_s$ existieren und endlich sind. Da $\{t \in [0,T] \mid \Delta f_t \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in [0,T] \mid |\Delta f_t| \geq \frac{1}{n}\}$, kann es insgesamt höchstens abzählbar viele Sprünge geben. $\square$

Beispiel 2.7. *Sei $t_0 \in (0,T)$ und Y eine nicht-konstante Zufallsvariable. Betrachte den stetigen stochastischen Prozess $X_t = (t-t_0)^+ Y$. X besitzt also ab t_0 die zufällige Steigung Y. Für die von X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^0(X))_{t\in[0,T]}$ (natürliche Filtration von X genannt) gilt,*

$$\mathcal{F}_t^0(X) := \sigma(X_s,\ s \le t) = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & : \quad \text{für } t \le t_0\,, \\ \sigma(Y) & : \quad \text{für } t > t_0 \quad . \end{cases}$$

Die von einem (rechts-)stetigen Prozess erzeugte Filtration muss also nicht notwendigerweise rechtsstetig sein.

Man kann jede Filtration um die P-Nullmengen von $\mathcal{F}$ erweitern und rechtsstetig „machen". Zu $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ definiere man dazu die Filtration $\widetilde{\mathbb{F}} = (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$ mit

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t := \begin{cases} \bigcap_{u\in(t,T]} \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{N}) & : \quad \text{für } t \in (0,T]\,, \\ \sigma(\mathcal{F}_T, \mathcal{N}) & : \quad \text{für } t = T \quad . \end{cases}$$

wobei $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} \mid P(A) = 0\}$. Offensichtlich ist $\widetilde{\mathbb{F}}$ rechtsstetig[‡] und $\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{F}}_t$ für alle $t \in [0,T]$.

In Beispiel 2.7 würde dies bedeuten, dass man die Information über die Steigung Y bereits zum Zeitpunkt t_0 und nicht erst „unmittelbar nach t_0" hat.

Rechtsstetige Prozesse, die man typischerweise betrachtet, erzeugen aber bereits eine rechtstetige Filtration. Beispiele:

(i) Sei X ein Zählprozess, d.h. $X_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[\tau_n,T]}(t)$ für Stoppzeiten τ_n. Die Filtration $\mathcal{F}_t^0(X) = \sigma(X_s,\ s \le t)$ ist dann rechtsstetig (siehe Theorem 25 in Protter [4] für einen Beweis).

(ii) Sei X eine Brownsche Bewegung. Dann ist die Filtration $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s,\ s \le t, \mathcal{N})$, wobei $\mathcal{N}$ die Nullmengen von $\sigma(X_s,\ s \le T)$ bezeichnet, rechtsstetig (siehe z.B. Karatzas und Shreve [2](1991), Proposition 7.7 und Theorem 7.9 in Chapter 2).

Die Rechtsstetigkeit ohne Nullmengenerweiterung ist die echt stärkere Eigenschaft. Bei einer bereits rechtstetigen Filtration ist auch die mit $\mathcal{N}$ erweitere Filtration rechtsstetig. Die zeigt die folgende Proposition.

Proposition 2.8. *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine beliebige Filtration. Es gilt*

$$\bigcap_{u\in(t,T]} \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{N}) = \sigma\left(\bigcap_{u\in(t,T]} \mathcal{F}_u, \mathcal{N} \right)$$

[‡]Sei $t < T$ und $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_s$ für alle $s \in (t,T]$. Für jedes $u \in (t,T]$ gibt es ein $s \in (t,u)$ und damit $A \in \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{N}) \supset \widetilde{\mathcal{F}}_s$. Es folgt $A \in \widetilde{\mathcal{F}}_t$.

Es ist also egal, ob man eine Filtration erst um $\mathcal{N}$ erweitert und dann rechtstetig macht oder umgekehrt.

Beweisbeginn. Ad $\supset$. Klar, da für jedes $u \in (t,T]$ gilt $\sigma\left(\bigcap_{s\in(t,T]} \mathcal{F}_s, \mathcal{N}\right) \subset \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{N})$.

Ad $\subset$. Offenbar gilt für alle σ-Algebren $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, dass

$$\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{N}) = \{A \in \mathcal{F} \mid \exists B \in \mathcal{G}, P(B\Delta A) = 0\}, \tag{2.1}$$

wobei $B\Delta A := (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ die symmetrische Differenz bezeichnet.

Sei nun $A \in \bigcap_{u\in(t,T]} \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{N})$. Mit (2.1) angewandt auf die σ-Algebren $\mathcal{F}_{t+1/n}$ folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $B_n \in \mathcal{F}_{t+1/n}$ existiert mit $P(B_n\Delta A) = 0$. Betrachte $B\Delta A$ mit $B := \limsup_{n\to\infty} B_n := \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n\geq m} B_n$. Offenbar gilt $\limsup_{n\to\infty} B_n \in \mathcal{F}_u$ für alle $u > t$ und damit $\limsup_{n\to\infty} B_n \in \mathcal{F}_{t+}$. Zudem gilt

$$P(B\Delta A) \leq P(\cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n\Delta A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n\Delta A) = 0.$$

Mit (2.1) angewandt auf $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{u\in(t,T]} \mathcal{F}_u$ ergibt dies $A \in \sigma(\mathcal{F}_{t+}, \mathcal{N})$ und damit die Behauptung. □

Im folgenden gelten stets die "üblichen Voraussetzungen".

Definition 2.9. *(1) Zwei stochastische Prozesse X und Y sind* **Modifikationen** *voneinander, wenn $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in [0,T]$.*

(2) Zwei Prozesse X und Y heißen **ununterscheidbar**, *wenn $P(X_t = Y_t,\ \forall t \in [0,T]) = 1$.*

Bemerkung 2.10. *Sind X und Y Modifikationen voneinander, dann existieren Nullmengen N_t, s.d. $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N_t$. Da aber $[0,T]$ überabzählbar ist, kann man über $\bigcup_{t\in[0,T]} N_t$ nicht viel sagen (diese Menge muss nicht einmal messbar sein). Wenn dagegen X und Y ununterscheidbar sind, dann existiert eine Nullmenge N, so dass die Abbildungen $t \mapsto X_t(\omega)$ und $t \mapsto Y_t(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ identisch sind. Wegen $P(N) = 0$ und den "üblichen Voraussetzungen" gilt $N \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0,T]$.*

Beispiel 2.11. *Seien $X = 0$ und $Y_t(\omega) = 1_{(t=U(\omega))}$, wobei U eine auf $[0,T]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist, d.h. $P(U \in (a,b)) = \frac{b-a}{T}$, $0 \leq a \leq b \leq T$. X und Y sind offenbar Modifikationen voneinander, da für alle $t \in [0,T]$, $P(X_t = Y_t) = P(U \neq t) = 1$ gilt, aber die Prozesse sind nicht ununterscheidbar, da $P(X_t = Y_t,\ \forall t \in [0,T]) = 0$.*

Theorem 2.12. *Seien X und Y Modifikationen voneinander und seien die Pfade von X und Y rechtsstetig. Dann sind X und Y ununterscheidbar.*

Folge: Wenn es zu einem Prozess X eine *rechtsstetige Modifikation* gibt, dann ist diese bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig.

Beweis von Theorem 2.12. Sei $N_t := \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ und $N := \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,T)} N_t \cup N_T$. Es gilt $P(N) = 0$. Zu zeigen: $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $(\omega, t) \in (\Omega \backslash N) \times [0,T]$. Sei $\omega \notin N$ und sei $t \in (\mathbb{Q} \cap [0,T)) \cup \{T\}$. Dann gilt $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Für beliebiges $t \in [0,T)$ existiert nun eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $t_n \searrow t$ und $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$. Aus der Rechtsstetigkeit folgt

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega).$$

Damit sind X und Y ununterscheidbar. □

Definition 2.13. *(1) Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to [0,T]$ ist eine* Stoppzeit*, wenn für alle $t \in [0,T]$ gilt $\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

(2) $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \in [0,T]\}$ heißt die σ-Algebra der τ-Vergangenheit.

Interpretation: Eine Stoppzeit entspricht einer Stoppstrategie, in die immer nur die jeweils zur Verfügung stehende Information einfließt (d.h. mit dem Informationsverlauf $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ kann man das Eintreten von τ beobachten).
$\mathcal{F}_\tau$ umfasst alle Informationen bis zum zufälligen Zeitpunkt τ. Für eine Menge A und ein $t_0 \in [0,T]$ mit $A \subset \{\tau = t_0\}$ gilt: $A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_{t_0}$. Spezieller: Für eine deterministische Stoppzeit τ, d.h. wenn $\tau(\omega) = t_0 \ \forall \omega \in \Omega$, gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$, wobei letzteres gemäß Definition 2.1 definiert ist. Damit ist die Notation konsistent.

Eine wichtige Folge der Rechtsstetigkeit der Filtration ist das folgende Theorem

Theorem 2.14. *τ ist genau dann eine Stoppzeit, wenn $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0,T]$.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei τ eine Stoppzeit, d.h. $\{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_u$, $\forall u \in [0,T]$. Da $\{\tau < 0\} = \emptyset$, muss nur der Fall $t > 0$ betrachtet werden. Da

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \text{ mit } t \geq 1/n} \left\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\right\}$$

und $\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t$, folgt $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

„$\Leftarrow$": Es gelte $\{\tau < u\} \in \mathcal{F}_u$, $\forall u \in [0,T]$. Wegen $\{\tau \leq T\} = \Omega \in \mathcal{F}_T$ müssen wir die entsprechende Aussage nur noch für $t < T$ zeigen. Für alle $s \in (t,T]$ gilt

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \text{ mit } t+1/n \leq s} \left\{\tau < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_s$$

und damit

$$\{\tau \leq t\} \in \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

□

Ohne Rechtsstetigkeit der Filtration gilt Teil 2 des Beweises offenbar nicht. Wähle dazu analog zu Beispiel 2.7 die nicht rechtsstetige Filtration

$$\mathcal{F}_t := \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & : \quad \text{für } t \leq t_0\,, \\ \mathcal{G} & : \quad \text{für } t > t_0 \quad . \end{cases}$$

wobei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist, die sich von $\{\emptyset, \Omega\}$ unterscheidet. Für ein $A \in \mathcal{G} \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ betrachte nun die zufällige Zeit

$$\tau(\omega) := \begin{cases} t_0 & : \quad \text{für } \omega \in A \\ T & : \quad \text{für } \omega \notin A. \end{cases}$$

Einerseits gilt $\{\tau < t\} = \emptyset$ für alle $t \in [0, t_0]$ und $\{\tau < t\} = A$ für alle $t \in (t_0, T]$, also $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle t. Andererseits gilt $\{\tau \leq t_0\} = A \notin \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_{t_0}$. Also ist τ keine Stoppzeit.

Definition 2.15. *Sei X ein stochastischer Prozess und Λ eine Borel-Menge in $\mathbb{R}$, d.h. $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Definiere $\tau(\omega) := \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \in \Lambda\}$. τ wird als Ersteintrittszeit von X in Λ bezeichnet.*

Theorem 2.16. *Sei X ein adaptierter Prozess, dessen Pfade links- oder rechtsstetig sind und sei Λ offen. Dann ist die entsprechende Ersteintrittszeit eine Stoppzeit.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Es gilt $\{\tau < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t)} \{X_s \in \Lambda\}$. Da $\{X_s \in \Lambda\} \in \mathcal{F}_s$ folgt die Behauptung. □

2.1 Martingale

Definition 2.17. *Ein reellwertiger, adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ mit $E|X_t| < \infty$ für alle $t \in [0, T]$ und* **càdlàg** *Pfaden heißt*

(i) **Martingal***, wenn*

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \ P\text{-f.s.}, \quad \forall s \leq t \tag{2.2}$$

(ii) **Supermartingal***, wenn*

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \ P\text{-f.s.}, \quad \forall s \leq t$$

(iii) **Submartingal***, wenn*

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \ P\text{-f.s.}, \quad \forall s \leq t$$

Zur Erinnerung: Sei Y eine reellwertige $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra. Für $Y \geq 0$ oder $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gibt es eine P-f.s. eindeutige $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z mit

$$E(1_A Z) = E(1_A Y), \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

$E_P(Y|\mathcal{G}) := Z$ wird als eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y unter der Information $\mathcal{G}$ bezeichnet. Damit ist (2.2) offenbar äquivalent zu

$$E(1_A(X_t - X_s)) = 0, \quad \forall s \leq t, \; A \in \mathcal{F}_s.$$

Zusatz: Wenn Y weder nichtnegativ noch in L^1 ist, dafür aber $E_P(|Y||\mathcal{G}) < \infty$, P-f.s. (bedingter Erwartungswert für die nichtnegative Zufallsvariable $|Y|$ stets definiert) kann man $E(Y|\mathcal{G})$ definieren als

$$E_P(Y|\mathcal{G}) = E_P(Y^+|\mathcal{G}) - E_P(Y^-|\mathcal{G}).$$

Bemerkung 2.18. *Die Eigenschaft eines Prozesses, ein Martingal zu sein, hängt also vom Maß P und der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ ab (die hier beide vorerst fest gegeben sind).*

Bemerkung 2.19. *Der Prozess Y aus Beispiel 2.11 mit $Y_t(\omega) = 1_{(t=U(\omega))}$ ist definitionsgemäß kein Martingal, da seine Pfade nicht rechtsstetig sind. Man kann natürlich lange darüber streiten, ob Y bzgl. seiner natürlichen Filtration $\mathcal{F}_t^0(Y) := \sigma(Y_s, \; s \leq t) = \sigma(\{\{U = s\} \mid s \leq t\})$ oder bzgl. der um die Nullmengen erweiterten Filtration*

$$\mathcal{F}_t^Y := \sigma(\mathcal{F}_t^0(Y), \mathcal{N}),$$

wobei $\mathcal{N} := \{A \in \sigma(U) \mid P(A) = 0\}$, ein Martingal genannt werden sollte oder besser nicht. Da die natürliche Filtration $\mathcal{F}^0(Y)$ bereits rechtsstetig ist, erfüllt $\mathcal{F}^Y$ mit Proposition 2.8 die usual conditions. Man beachte, dass U keine $\mathcal{F}^Y$-Stoppzeit ist. Es gilt nämlich $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(\mathcal{N}) \neq \sigma(U)$ für alle $t \in [0,T]$ (wieso ?) Die Martingaleigenschaft (2.2) ist offenbar erfüllt.

Theorem 2.20. *Sei H eine Zufallsvariable mit $E|H| < \infty$. Dann existiert (bis auf Ununterscheidbarkeit) genau ein (P-)Martingal X mit Endwert $X_T = H$, P-f.s., nämlich eine càdlàg Modifikation des Prozesses $t \mapsto E(H|\mathcal{F}_t)$.*

Der Beweis findet sich z.B. in Dellacherie und Meyer[§]. Aus Bedingung (2.2) und der Eindeutigkeit (bis auf Ununterscheidbarkeit) einer rechtsstetigen Modifikation (Theorem 2.12) folgt sofort die Eindeutigkeit des Martingales (Bemerkung 2.19 zeigt dagegen, dass ohne die Bedingung, dass ein Martingal rechtsstetig sein muss, aus der Gleichheit der Endwerte noch keine Ununterscheidbarkeit folgen würde). Für die Existenz muss gezeigt werden, dass es einen càdlàg Prozess X mit $P(X_t = E(H \mid \mathcal{F}_t)) = 1$ für alle $t \in [0,T]$ gibt. Für die Existenz der linken Limiten bedient man sich eines Martingalkonvergenzsatzes. Für die Rechtsstetigkeit braucht man, dass die Filtration rechtsstetig ist ("usual conditions").

[§]Probabilities and potential. North Holland, 1978

Bemerkung 2.21. *Für jedes $t \in [0,T]$ ist die Zufallsvariable $E(H \mid \mathcal{F}_t)$ nur bis auf eine Nullmenge definiert. Streng genommen kann man also gar nicht von einem Prozess $t \mapsto E(H \mid \mathcal{F}_t)$ sprechen, sondern nur von einer Familie von Äquivalenzklassen von Zufallsvariablen. Es ist aber klar, was in Theorem 2.20 gemeint ist. Später ist dann mit $t \mapsto E(H \mid \mathcal{F}_t)$ immer die rechtsstetige Modifikation gemeint.*

Bemerkung 2.22. *Die zusätzliche Bedingung, dass Pfade eines Martingals càdlàg sein müssen, impliziert also einen eineindeutigen Zusammenhang zwischen integrierbaren Zufallsvariablen und Martingalen (wenn man ununterscheidbare Prozesse miteinander identifiziert). Damit ist wie im Zeitdiskreten jedes Martingal durch seinen Endwert eindeutig bestimmt.*

Ein wichtiges Beispiel für ein Martingal ist eine Brownsche Bewegung.

Definition 2.23. *Ein adaptierter Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und $B_0 = 0$ ist eine d-dimensionale Standard-Brownsche-Bewegung wenn*

(1) für $0 \leq s \leq t < \infty$, $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist

(2) für $0 \leq s \leq t < \infty$, $B_t - B_s$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswert Null und Varianzmatrix $(t-s)I$ ist. (I: Einheitsmatrix).

(3) alle Pfade $t \mapsto B_t(\omega)$ stetig sind.

Bemerkung 2.24. *„Multivariat normalverteilt" impliziert, dass $B_t^i - B_s^i$ und $B_t^j - B_s^j$ für $i \neq j$ stochastisch unabhängig sind (und nicht nur unkorreliert, was daraus folgt, dass die Varianzmatrix eine Diagonalmatrix ist). In der Definition könnte man aber auch „multivariat normalverteilter" komplett weglassen, weil es aus den anderen Eigenschaften bereits folgt (dies ist an dieser Stelle aber alles andere als klar).*

Meistens ist die Eigenschaft, dass ein Prozess B eine Brownsche Bewegung ist, bezüglich seiner natürlichen Filtration $\mathcal{F}^B$ definiert. (2) bedeutet dann, dass $B_t - B_s$ von allen $(B_{u_1}, \ldots, B_{u_n})$ mit $0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq s \leq t$ stochastisch unabhängig ist (Adaptiertheit ist dann automatisch gegeben). Man spricht dann von einer **intrinsischen** Brownschen Bewegung.

Theorem 2.25. *Es existiert eine Brownsche Bewegung. Genauer: Es existiert ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, der die usual conditions erfüllt und auf dem ein Prozess $(B_t)_{t\in[0,T]}$ mit den Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 2.23 definiert werden kann. Von einem solchen Prozess existiert eine Modifikation, die auch (3) erfüllt.*

Für einen Beweis siehe z.B. das Lehrbuch „Wahrscheinlichkeitstheorie" von Klenke. Als Filtration kann die um die Nullmengen erweiterte natürliche Filtration gewählt werden. Der zweite Teil des Satzes folgt wegen $E\left(B_t - B_s\right)^4 = (t-s)^2 E(B_1^4)$ aus dem Satz von Kolmogorov[¶].

[¶] Der Satz von Kolmogorov besagt: wenn für einen stochstischen Prozess X Konstanten $\varepsilon, \beta, C > 0$ existieren mit $E\left(|X_t - X_s|^{\varepsilon}\right) \leq C|t-s|^{1+\beta}$, $\forall s \leq t$, dann besitzt X eine stetige Modifikation.

Bemerkung 2.26. *In einigen Lehrbüchern und Skripten wird statt (3) nur gefordert, dass P-fast alle Pfade stetig sind. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, der die usual conditions erfüllt, macht dies aber keinen wesentlichen Unterschied. Sei dazu $\widetilde{B}$ ein adaptierter Prozess, der (1) und (2) erfüllt und für den $E := \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \widetilde{B}_t(\omega)$ ist stetig$\}$ eine P-Einsmenge ist (Komplement einer P-Nullmenge, d.h. $P(E) = 1$). Definiere nun*

$$B_t(\omega) := \begin{cases} \widetilde{B}_t(\omega) & : \quad \textit{für } \omega \in E\,, \\ 0 & : \quad \textit{sonst} \quad . \end{cases}$$

Wegen den usual conditions liegt $\Omega \setminus E$ und damit auch E in $\mathcal{F}_t$ für alle $t \in [0, T]$. Damit ist das oben definierte B ein adaptierter Prozess. (1) und (2) bleiben erfüllt und **alle** *Pfade von B sind stetig.*

Theorem 2.27. *Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung. Dann sind die folgenden Prozesse Martingale:*

(a) $(B_t)_{t\geq 0}$

(b) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$

(c) $(e^{aB_t - \frac{1}{2}a^2 t})_{t\geq 0}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ad (a). Sei $t \geq s$:

$$\begin{aligned} E(B_t \mid \mathcal{F}_s) &= B_s + E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &\overset{(1)}{=} B_s + E(B_t - B_s) \overset{(2)}{=} B_s \end{aligned}$$

Ad (b): Es gilt: $$\begin{aligned} E(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) &= E((B_s + B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) \\ &= B_s^2 + 2B_s E(B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s) + E((B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s) \\ &= B_s^2 + t - s \end{aligned}$$

$\Rightarrow E(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$.

Ad (c): Ferner gilt: $$\begin{aligned} E(e^{aB_t} \mid \mathcal{F}_s) &= e^{aB_s} E e^{a(B_t - B_s)} \\ &= e^{aB_s} e^{\frac{1}{2}a^2(t-s)} \Rightarrow \text{ Beh.} \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit braucht man, dass für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z und $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} E\left(e^{bZ}\right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{bx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-b)^2 + b^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-b)^2}{2}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Setze $b = a\sqrt{t-s}$ und benutze, dass $B_t - B_s$ und $\sqrt{t-s}Z$ in Verteilung übereinstimmen. $\square$

Definition 2.28. *Ein endliches Tupel* $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *ist ein* **Gitter** *auf* $[a, b]$ *(oder auch Partition von* $[a, b]$ *genannt), wenn* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. *Der Ausdruck* $mesh(\pi) := \max_{j=1,\dots,k} |t_j - t_{j-1}|$ *bezeichnet die* **Feinheit** *des Gitters (der Partition).*

Definition 2.29. *Sei* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein reellwertiger stochastischer Prozess mit càdlàg Pfaden. Unter der Variation von* X *verstehen wir den nichtfallenden* $[0, \infty]$*-wertigen Prozess* $Var(X)$ *mit*

$$Var(X)_t = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t}|. \tag{2.3}$$

Man sagt, dass X *von* **endlicher Variation** *ist, wenn* $Var(X)_t < \infty$ P*-f.s.* $\forall t < \infty$.

Bemerkung 2.30. *Für Prozesse mit rechts- (oder links-)stetigen Pfaden kann man zeigen, dass die Variation nicht größer würde, wenn man statt den dyadischen Gittern in (2.3) beliebige Gitter* $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ *mit* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = t$ *betrachten würde. Für eine rechtsstetige Funktion* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *gilt nämlich*

$$\sup_{\pi=(t_0,t_1,\dots,t_k)} \sum_{l=1}^{k} |f(t_l) - f(t_{l-1})| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{2^n} |f(tl2^{-n}) - f(t(l-1)2^{-n})|, \tag{2.4}$$

wobei das Supremum auf der linken Seite über alle Gitter π *mit* $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_k)$ *für ein* $k \in \mathbb{N}$ *und* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = t$ *gebildet wird. Allgemeiner gilt für jede Gitterfolge* $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit Gitterpunkten* $(t_0^n, t_1^n, \dots, t_{k_n}^n)$, $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{k_n}^n = t$, *und* $\mathrm{mesh}(\pi_n) \to 0$:

$$\sup_{\pi=(t_0,t_1,\dots,t_k)} \sum_{l=1}^{k} |f(t_l) - f(t_{l-1})| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_n} |f(t_l^n) - f(t_{l-1}^n)|. \tag{2.5}$$

(Übungsaufgabe). (2.5) zeigt, dass die Wahl der Gitterfolge nicht relevant ist, im Gegensatz zur pfadweisen quadratischen Variation (vgl. Theorem 2.35). Für nicht-reguläre Pfade (wie etwa bei der Funktion $t \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(t)$*) gilt (2.4) i.A. nicht.*

Definition 2.29 hat den Vorteil, dass der Prozess nur an abzählbar vielen Zeitpunkten abgegriffen wird. Damit ist sofort klar, dass $Var(X)_t$ *eine* $\mathcal{F}_t$*-messbare Abbildung ist. Das punktweise Supremum überabzählbar vieler Zufallsvariablen ist dagegen i.A. keine Zufallsvariable.*

Theorem 2.31. *Sei* X *càdlàg und von endlicher Variation. Dann ist* $t \mapsto Var(X)$ *nichtfallend und càdlàg.*

Beweis: Übungsaufgabe (Tipp: Benutze (2.4)).

Theorem 2.32. *Die Standard-Brownsche-Bewegung hat P-f.s. unendliche Variation, d.h. $P(Var(B)_t = \infty) = 1$, $\forall t > 0$.*

Bemerkung 2.33 (Quadratische Variation von Wertpapierpreisprozessen)**.** *Kapitel 1 lieferte Hinweise, dass stetige Aktienpreisprozesse, wenn sie ,,risikolose Gewinnmöglichkeiten" ausschließen, von unendlicher Variation sein sollten. Nun wollen wir statt der absoluten Zuwächse die quadratischen Zuwächse eines Preisprozesses X betrachten, also*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2$$

für Gitterpunkte $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$.

Eine Investorin halte zwischen t_{k-1} und t_k genau $-X_{t_{k-1}}$ Aktien, was zum Handelsgewinn

$$\sum_{k=1}^{n} -X_{t_{k-1}} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)$$

führt. Elementare Umformungen ergeben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} -X_{t_{k-1}} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_{k-1}}^2 - X_{t_k}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(X_0^2 - X_T^2\right). \end{aligned}$$

Die Investorin spekuliert also auf starke Schwankungen. Nun nehmen wir an, es existiert eine Gitterfolge, so dass die quadratische Variation entlang dieser Folge in einem schwachen Sinne ,,explodiert": es existiere ein $\varepsilon > 0$ s.d. für alle Schranken $M \in \mathbb{R}_+$ ein Gitter existiert mit $P(\sum_k (\ldots)^2 \geq M) \geq \varepsilon$. Andererseits lassen sich die Verluste durch $1/2\left(X_T^2 - X_0^2\right)$ nach oben abschätzen, was eine endliche Zufallsvariable ist, die nicht vom Gitter abhängt. Unter gewissen Zusatzbedingungen ist dies dann eine ,,approximative Arbitrage", was wir aber erst später formalisieren können.

Theorem 2.34. *Sei $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gittern auf $[a, a+t]$ (d.h. $\pi_n = (t_0^n, t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n)$, $k_n \in \mathbb{N}$, $a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = a + t$, wobei die Gitterpunkte t_k^n nicht von ω abhängen) mit $\lim_{n\to\infty} mesh(\pi_n) = 0$. Sei $\pi_n^{(2)}(B) := \sum_{j=1}^{k_n} \left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right)^2$.*

(i) Es gilt

$$\pi_n^{(2)}(B) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \quad \text{in } L^2$$

(und damit auch in Wahrscheinlichkeit).

(ii) Wenn $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **verfeinernd** *ist, d.h. für alle $n \leq m$ ist jeder Zeitpunkt aus π_n auch in π_m enthalten, dann gilt die Konvergenz auch P-f.s.*

Beweis der L^2-Konvergenz. Es gilt

$$\pi_n^{(2)}(B) - t = \sum_{j=1}^{k_n} [(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)],$$

wobei die Summanden $(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)$, $j = 1, \dots, k_n$ stochastisch unabhängig voneinander sind und Erwartungswert Null besitzen. Damit gilt

$$E\left[\left(\pi_n^{(2)}(B) - t\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{k_n} E\left[\left((B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)\right)^2\right].$$

Außerdem hat $\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right)^2$ die gleiche Verteilung wie $Z^2(t_j^n - t_{j-1}^n)$, wobei Z eine standard-normalverteilte Zufallsvariablen ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
E[(\pi_n^{(2)}(B) - t)^2] &= \sum_{j=1}^{k_n} E\left[\left((B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)\right)^2\right] \\
&= E[(Z^2 - 1)^2] \sum_{j=1}^{k_n} (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \\
&= E[(Z^2 - 1)^2] \sum_{j=1}^{k_n} |t_j^n - t_{j-1}^n||t_j^n - t_{j-1}^n| \\
&\leq E[(Z^2 - 1)^2] \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{mesh}(\pi_n)|t_j^n - t_{j-1}^n| \\
&= E[(Z^2 - 1)^2] \underbrace{\mathrm{mesh}(\pi_n)t}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty},
\end{aligned}$$

d.h. $\pi_n^{(2)}(B) \to t$ in L^2 für $n \to \infty$. Hierbei geht natürlich ein, dass die Normalverteilung endliche vierte Momente besitzt und damit $E[(Z^2 - 1)^2] < \infty$. □

Theorem 2.35. *Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Für P-fast alle Pfade $t \mapsto B_t(\omega)$ existiert eine Folge von Gittern $\pi_n = (t_0^n, \dots, t_{k_n}^n)$ von $[a, b]$ (abhängig von ω) mit $\lim_{n\to\infty} mesh(\pi_n) = 0$ und $\pi_n^{(2)}(B) := \sum_{j=1}^{k_n} \left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$.*

Man beachte, dass sich Theorem 2.34 und Theorem 2.35 nicht widersprechen !

Der Fall $r = 0$ in Theorem 2.35 kann bereits mit der Ausnutzung der Stetigkeit der Pfade der Brownschen Bewegung gezeigt werden (dies wird eine Übungaufgabe sein). Für $r > 0$ geht zusätzlich das Fluktuationsverhalten der Pfade ein.

Zusatz:

Für die f.s.-Konvergenz siehe Beweis von Theorem 28 in Kapitel I von Protter [4], der auf der Konvergenz eines sog. Rückwärtsmartingals beruht. Ein Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein zeitdiskretes Rückwärtsmartingal, wenn

$$M_{n+1} = E(M_n \mid M_{n+1}, M_{n+2}, M_{n+3}, \ldots), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$E(M_{n+1} - M_n \mid M_{n+1}, M_{n+2}, M_{n+3}, \ldots) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ein Rückwärtsmartingal bekommt man, indem man ein Martingal rückwärts in der Zeit durchläuft. Nehme nun an, die Zeitpunkte 1 und 2 sind bereits im Gitter und der Zeitpunkt $\frac{3}{2}$ wird noch hinzugenommen. Zwischen den quadratischen Schwankungen auf dem Gittern $(1, \frac{3}{2}, 2)$ und $(1, 2)$ besteht folgender Zusammenhang

$$(B_{\frac{3}{2}} - B_1)^2 + (B_2 - B_{\frac{3}{2}})^2 = (B_2 - B_1)^2 - 2(B_{\frac{3}{2}} - B_1)(B_2 - B_{\frac{3}{2}}).$$

Der durch die Verfeinerung hinzukommende Term $-2(B_{\frac{3}{2}} - B_1)(B_2 - B_{\frac{3}{2}})$ kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen (daher keine monotone Konvergenz !) und ist im Erwartungswert Null. Außerdem gilt wegen der Symmetrie der Normalverteilung

$$E\left[(B_{\frac{3}{2}} - B_1)(B_2 - B_{\frac{3}{2}}) \mid (B_{\frac{3}{2}} - B_1)^2,\ (B_2 - B_{\frac{3}{2}})^2\right] = 0$$

(Obwohl $(B_{\frac{3}{2}} - B_1)(B_2 - B_{\frac{3}{2}})$ natürlich nicht unabhängig von $(B_{\frac{3}{2}} - B_1)^2$ und $(B_2 - B_{\frac{3}{2}})^2$ ist). Damit verhält sich $(B_{\frac{3}{2}} - B_1)(B_2 - B_{\frac{3}{2}})$ wie der Zuwachs eines Rückwärtsmartingals (wobei wir noch auf alle quadratischen Schwankungen auf den Teilintervallen $[1, \frac{3}{2}]$ und $[\frac{3}{2}, 2]$ bedingen müssten). Die P-f.s. Konvergenz gegen eine Zufallsvariable folgt dann aus der Konvergenz von $\lim_{n\to\infty} M_n$, wobei $M_n := \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{1+k/2^n} - B_{1+(k-1)/2^n}\right)^2$ (für den formalen Beweis siehe Theorem 28 in Kapitel I von Protter [4]).

Beweis von Theorem 2.32. Wenn eine Folge in Wahrscheinlichkeit konvergiert, dann besitzt sie eine fast sicher konvergente Teilfolge – natürlich mit dem gleichen Grenzwert (siehe Theorem C.4). Somit folgt mit Theorem 2.34(i) die Existenz einer Folge von Gittern $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[0, t]$ mit $\mathrm{mesh}(\pi_n) \to 0$ und $\pi_n^{(2)}(B) \to t$, P-f.s.*. Sei $\pi_n = (t_0^n, t_1^n, \ldots, t_{k_n}^n)$ eine solche Folge.

Sei $\omega \in \Omega$ mit folgenden Eigenschaften

(1) $\mathrm{Var}(B)_t(\omega) < \infty$

(2) $\sum_{k=1}^{k_n} (B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega))^2 \to t, \quad n \to \infty.$

*Mit dem nicht bewiesenen Theorem 2.34(ii) wissen wir sogar, dass entlang jeder verfeinernden Gitterfolge, also z.B. $\pi_n := \left(0, \frac{1}{2^n}t, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}t, t\right)$, fast sichere Konvergenz vorliegt. Allerdings sind wir im folgenden auf diese stärkere Aussage nicht angewiesen.

Eigenschaften (2) gilt auf einer Einsmenge. Wenn wir also zeigen können, dass es dieses ω, das beide Eigenschaften erfüllt, gar nicht geben kann, ist das Theorem bewiesen. Es gilt

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega))^2 \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{k=1,\dots,k_n} |B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega)| \sum_{k=1}^{k_n} |B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega)| \right) \\ &\leq \mathrm{Var}(B)_t(\omega) \limsup_{n\to\infty} \sup_{k=1,\dots,k_n} |B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega)|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit des Pfades $s \mapsto B_s(\omega)$ auf $[0,t]$ konvergiert die Folge $(\sup_{k=1,\dots,k_n} |B_{t_k^n}(\omega) - B_{t_{k-1}^n}(\omega)|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Die Abschätzung (2.6) kann also nicht gelten. Es folgt $P(\mathrm{Var}(B)_t = \infty) = 1$, $\forall t > 0$. □

3 Stochastische Integration

Definition 3.1. *Ein stochastischer Prozess $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ heißt* **elementar vorhersehbar***, wenn er sich schreiben lässt als*

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}(\omega) 1_{]\!]T_{i-1},T_i]\!]}(\omega, t), \tag{3.1}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $(T_i)_{i=0,1,\dots,n}$ Stoppzeiten mit $0 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_n = T$ und Z_i, $i = 0,\dots,n-1$, sind $\mathcal{F}_{T_i}$-messbare Zufallsvariablen. $|Z_i| < \infty$ („punktweise"), $i = 0,\dots,n-1$. Mit den Symbolen $[\![$ und $]\!]$ bezeichnen wir stochastische Intervalle, d.h. für Stoppzeiten τ und σ definieren wir

$$\begin{aligned}]\!]\tau,\sigma]\!] &:= \{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T] \mid \tau(\omega) < t \leq \sigma(\omega)\} \\ ]\!]\tau,\sigma[\![&:= \{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T] \mid \tau(\omega) < t < \sigma(\omega)\} \\ [\![\tau,\sigma]\!] &:= \{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T] \mid \tau(\omega) \leq t \leq \sigma(\omega)\} \\ [\![\tau,\sigma[\![&:= \{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T] \mid \tau(\omega) \leq t < \sigma(\omega)\} \\ [\![\tau]\!] &:= [\![\tau,\tau]\!]. \end{aligned}$$

Die Menge der elementar vorhersehbaren Prozesse wird mit $\mathcal{S}$ bezeichnet. Ein Prozess der Form (3.1) wird später auch Elementarintegrand genannt.

Sei X ein stochastischer Prozess mit **càdlàg-Pfaden**. Für einen elementar vorhersehbaren Prozess H wie in (3.1) definieren wir das stochastische Integral als einen Prozess, den man als akkumulierten Handelsgewinn interpretieren kann.

Definition 3.2. *[Elementarintegral] Für ein $H \in \mathcal{S}$ und einen adaptierten càdlàg-Prozess X definiere die lineare Abbildung*

$$
\begin{aligned}
H \mapsto J_X(H) &= \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}(X_{T_i \wedge \cdot} - X_{T_{i-1} \wedge \cdot}), \qquad (3.2)\\
\textit{wobei } H &= \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1} 1_{]\!]T_{i-1}, T_i]\!]}.
\end{aligned}
$$

Z_i ist $\mathcal{F}_{T_i}$-messbar (für $i = 0, \dots, n-1$), $0 = T_0 \leq \dots \leq T_n = T$. Wir nennen $J_X(H)$ das stochastische Integral von H nach X und **bezeichnen diesen Prozess synonym auch mit** *$H \bullet X$ (wie in der zeitdiskreten Vorlesung). Insbesondere bezeichnet $H \bullet X_t = J_X(H)_t$ den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Der Funktionswert $J_X(H)$ ist ein Element aus $\mathbb{D}$, der Menge der adaptierten Prozesse mit càdlàg-Pfaden.*

H wird als Integrand und X als Integrator bezeichnet. Man sieht, dass $J_X(H)$ durch die rechte Seite von (3.2) wohldefiniert ist, d.h. für zwei verschiedene Darstellungen (3.1) des gleichen H kommt das gleich heraus. (3.2) nennt man auch Elementarintegral.

Den Endwert des Integrals bezeichnen wir mit I_X, also

$$
I_X(H) := J_X(H)_T = \sum_{i=1}^{n} Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}}) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P). \qquad (3.3)
$$

In der Finanzmathematik spielen stochastische Integrale eine wichtige Rolle. $J_X(H)_t$, $t \in [0, T]$, kann nämlich als *Handelsgewinn*, den man mit der Strategie H zwischen den Zeitpunkten 0 und t erzielt, interpretiert werden. Die Zufallsvariable H_u ist dabei die Anzahl der risikobehafteten Aktie im Portfolio zum Zeitpunkt $u \in [0, T]$ und X ist der Preisprozess der Aktie. Nehme der Einfachheit halber an, es gäbe einen risikoloses Wertpapier („Bond", „Bankkonto") mit konstantem Preis = 1. Zum Zeitpunkt T_{i-1} und Stückpreis $X_{T_{i-1}}$ kaufe man Z_{i-1} Aktien und verkaufe diese wieder zum Zeitpunkt T_i und Stückpreis X_{T_i}. Der (nicht notwendigerweise positive) Gewinn aus dieser Aktion beträgt $Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})$. Kapital, welches nicht in der Aktie investiert ist, soll in den Bond investiert werden. Da letzterer jedoch konstanten Preis haben soll, entstehen daraus keine Gewinne und die Investition in Bonds muss nicht explizit modelliert werden. Der Gesamtgewinn bis T beträgt folglich $I_X(H)$. Z_{i-1} darf zwar zufällig sein, muss jedoch zum Zeitpunkt T_{i-1} bekannt sein, da der Kauf ja zum Zeitpunkt T_{i-1} abgewickelt werden soll. D.h. es darf nicht auf zukünftige Ereignisse bedingt werden, die in T_{i-1} noch gar nicht bekannt sind. Also muss Z_{i-1} $\mathcal{F}_{i-1}$-messbar sein,

Die Einschränkung auf elementare Prozesse der Form (3.1) bedeutet dabei, dass das Portfolio nur endlich oft umgeschichtet werden darf. Für die meisten Anwendungen (etwa die Replikation von Optionsauszahlungen) reicht dies jedoch nicht aus. Wenn die Preisprozesse zeitstetig sind, sollte auch das Portfolio zeitstetig umgeschichtet werden können. Zeitstetige Preisprozesse sind wiederum oft analytisch einfacher handhabbar als vergleichbare zeitdiskrete Prozesse. Insbesondere bei der Analyse mit *high-frequency data* ist die Arbeit mit ihnen effektiver. Bei der praktischen Implementierung der Ergebnisse muss die Zeit dann natürlich wieder diskretisiert werden.

Bemerkung 3.3 (Einbettung zeitdiskreter Modelle). *Zeitdiskrete Modelle lassen sich als Spezialfall zeitstetiger Modelle interpretieren. Sei $T \in \mathbb{N}$. Zu einem zeitdiskreten Wertpapierpreisprozess $\widetilde{S}$ und einer zeitdiskreten Handelsstrategie $\widetilde{H}$, beides Abbildungen von $\Omega \times \{0, 1, \ldots, T\}$ nach $\mathbb{R}$, wobei $\widetilde{S}$ adaptiert und $\widetilde{H}$ im zeitdiskreten Sinne vorhersehbar bzgl. der Filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n=0,1,\ldots,T}$ ist, definiere man*

$$S_t(\omega) := \sum_{n=0}^{T} \widetilde{S}_n(\omega) 1_{[n,n+1)}(t)$$

und

$$H_t(\omega) := \sum_{n=1}^{T} \widetilde{H}_n(\omega) 1_{(n-1,n]}(t)$$

Zudem wird die Filtration in stetiger Zeit durch

$$\mathcal{F}_t := \widetilde{\mathcal{F}}_{[t]}, \quad \textit{wobei } [t] := \max\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \leq t\}.$$

definiert (d.h. neue Informationen kommen nur in $t \in \mathbb{N}$ hinzu).

Für $t \in \mathbb{N}$ gilt $S_{t-} := \lim_{s \uparrow t} S_s = S_{t-1}$ und damit $\Delta S_t := S_t - S_{t-} = S_t - S_{t-1}$. Des weiteres ist wegen der $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von $\widetilde{H}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Prozess H elementar vorhersehbar im Sinne von Definition 3.1 und das Elementarintegral (3.2) beträgt

$$\sum_{n=1}^{\cdot} \widetilde{H}_n(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_{n-1}),$$

wobei in „·" immer die laufende Zeit einzusetzen ist. Es stimmt somit mit dem Integral aus der zeitdiskreten Vorlesung überein.

3.1 Fortsetzung des Elementarintegrals

Um den Definitionsbereich von $H \mapsto J_X(H)$ passend erweitern zu können, reicht es aus, vom Endwert I_X eine gewisse Stetigkeit zu fordern.

Definition 3.4. *Sei X adaptiert und càdlàg. X heißt* **guter Integrator**†*, wenn die Abbildung I_X im folgenden Sinne stetig ist: Für alle $(H^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ und $H \in \mathcal{S}$ gilt die Implikation*

$$H^n \to H \textit{ gleichmäßig auf } \Omega \times [0, T] \Rightarrow I_X(H^n) \to I_X(H) \textit{ in Wahrscheinlichkeit.} \quad (3.4)$$

†Man kann zeigen, dass die Menge der guten Integratoren mit der Menge der sog. Semimartingale übereinstimmt. Letztere werden aber i.d.R. anders eingeführt (kommt später), so dass wir bei Prozessen, die (3.4) erfüllen, zunächst von guten Integratoren sprechen.

Bemerkung 3.5. *Da Vielfache und Summen von Elementarintegranden wieder Elementarintegranden sind, also insbesondere* $(H^n - H) \in \mathcal{S}$*, und da die Abbildung* $H \mapsto I_X(H)$ *linear ist, kann man äquivalent die Implikation (3.4) auch nur für* $H = 0$ *fordern.* **Davon werden wir im folgenden stets Gebrauch machen.**

Bemerkung 3.6. *Man beachte, dass (3.4) eine schwache Stetigkeit ist: Für die Elementarintegranden wird gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt, während dies nur stochastische Konvergenz der Endwerte der Elementarintegrale implizieren muss. Dies bedeutet, dass Prozesse nicht unnötig als Integratoren ausgeschlossen werden.*

Interessanterweise **müssen** sinnvolle Wertpapierpreisprozesse gute Integratoren sein:

Definition 3.7 (NUPBR)**.** *Ein adaptierter càdlàg Prozess* X *erfüllt "no unbounded profit with bounded risk" (NUPBR), wenn die Menge*

$$\{J_X(H)_T \mid H \in \mathcal{S} \text{ mit } J_X(H)_t \geq -1 \ \forall t \in [0,T]\}$$

in Wahrscheinlichkeit beschränkt ist[‡]*.*

Theorem 3.8. *Wenn* X *(NUPBR) erfüllt und nichtnegativ ist, dann ist* X *ein guter Integrator.*

Das Theorem soll nur als Hintergrundinformation dienen. Es kann hier nicht bewiesen werden (Bemerkung 2.33 liefert jedoch einen ersten Anhaltspunkt).

Theorem 3.9. *Sei* Q *ein zu* P *absolutstetiges Maß, d.h.* $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}$*. Schreibweise:* $Q \ll P$*. Jeder gute Integrator im Modell* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ *ist auch ein guter Integrator im Modell* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q)$*.*

Lemma 3.10. *Sei* $Q \ll P$ *und* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen, die in* P*-Wahrscheinlichkeit gegen eine reellwertigen Zufallsvariable* Z *konvergiert. Dann konvergiert* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auch in* Q*-Wahrscheinlichkeit gegen* Z*.*

Beweise von Lemma 3.10. 1) Stochastische Konvergenz einer Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Z ist dazu äquivalent, dass jede Teilfolge $(Z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(Z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ besitzt, die fast sicher gegen Z konvergiert. Bei fast sicherer Konvergenz ist die Implikation klar, da jede P-Nullmenge auch eine Q-Nullmenge ist.

2) Ein Alternativbeweis (ohne Benutzung des Teilfolgenkriteriums): Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallvariablen mit $Z_n \to Z$ P-stochastisch. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$Q(|Z_n - Z| > \varepsilon) = E_P\left[\frac{dQ}{dP} 1_{\{|Z_n - Z| > \varepsilon\}}\right] \tag{3.5}$$

und die Folge $(\frac{dQ}{dP} 1_{\{|Z_n - Z| > \varepsilon\}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert P-stochastisch gegen null, da

$$P\left(\left|\frac{dQ}{dP} 1_{\{|Z_n - Z| > \varepsilon\}}\right| > \varepsilon'\right) \leq P(|Z_n - Z| > \varepsilon), \quad \forall \varepsilon' > 0, \tag{3.6}$$

[‡]Eine Menge $\mathcal{M}$ von reellwertigen Zufallsvariablen heißt „beschränkt in Wahrscheinlichkeit", wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $P(|X| > c) \leq \varepsilon$ für alle $X \in \mathcal{M}$.

und die rechte Seite von (3.6) für $n \to \infty$ gegen null geht. Zudem ist $(\frac{dQ}{dP} 1_{\{|Z_n - Z| > \varepsilon\}})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig P-integrierbar und konvergiert damit auch in $L^1(P)$ gegen null. Also konvergiert (3.5) für $n \to \infty$ gegen null, was Q-stochastische Konvergenz ergibt. □

Beweis von Theorem 3.9. Sei X ein guter Integrator im Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und $H^n \to 0$ gleichmäßig auf $\Omega \times [0,T]$. Also gilt $I_X(H^n) \to 0$ in P-Wahrscheinlichkeit. Die Aussage des Satzes folgt, da Konvergenz in P-Wahrscheinlichkeit Konvergenz in Q-Wahrscheinlichkeit nach sich zieht (siehe Lemma). □

Bemerkung 3.11. *In Anwendungen kommt es oft vor, dass man sich ein stochastisches Modell unter verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen anschauen möchte. Dafür ist es wichtig, dass gewisse fundamentale Eigenschaften des Modells unter der Umgewichtung der Wahrscheinlichkeiten nicht verloren gehen.*

Theorem 3.12. *Jeder Prozess von endlicher Variation ist ein guter Integrator.*

Beweis. Sei $H \in \mathcal{S}$ mit einer Darstellung (3.1). Es gilt

$$\begin{aligned} |I_X(H)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |Z_{i-1}|\, |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}| \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} |H_t| \mathrm{Var}(X)_T. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sei $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $H^n \to 0$ gleichmäßig auf $\Omega \times [0,T]$. D.h. es existiert eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ mit $|H_t^n(\omega)| \leq a_n$, $\forall (\omega,t) \in \Omega \times [0,T]$. Wendet man (3.7) auf H^n an, dann folgt $P(|I_X(H^n)| > \varepsilon) \leq P\left(\mathrm{Var}(X)_T > \frac{\varepsilon}{a_n}\right) \to P\left(\mathrm{Var}(X)_T = \infty\right) = 0,\ \ n \to \infty, \forall \varepsilon > 0.$ Also konvergiert die Folge $I_X(H^n)$ stochastisch gegen 0 und es folgt die Behauptung. □

Theorem 3.13. *Jeder deterministische Prozess*[§] *von unendlicher Variation ist kein guter Integrator.*

Beweis. Sei $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ eine càdlàg Funktion mit $\mathrm{Var}(x)_T = \infty$ (x könnte z.B. ein Pfad der Brownschen Bewegung sein). Nun kann man eine Folge $(h^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementar-Integranden $h^n : [0,T] \to \mathbb{R}$ finden, die zwar alle $\sup_{t\in[0,T]} |h^n(t)| \leq 1$ erfüllen, aber die trotzdem bewirken, dass $I_x(h^n) \to \infty,\ n \to \infty$. Setzte dazu

$$h^n(t) := \sum_{i=1}^{2^n} \xi_{i-1,n} 1_{(\frac{i-1}{2^n}T, \frac{i}{2^n}T]}(t), \tag{3.8}$$

wobei

$$\xi_{i-1,n} = \begin{cases} 1 & : \quad \text{für } x\left(\frac{i}{2^n}T\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}T\right) > 0\,, \\ -1 & : \quad \text{für } x\left(\frac{i}{2^n}T\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}T\right) \leq 0 \end{cases} .$$

[§] d.h. nur von t aber nicht von ω abhängend

Es folgt

$$
\begin{aligned}
I_x(h^n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \xi_{i-1,n} \left(x\left(\frac{i}{2^n}T\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}T\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \left| x\left(\frac{i}{2^n}T\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}T\right)\right| \to \mathrm{Var}(x)_T = \infty, \quad n \to \infty. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Nun betrachte man die Integranden $\varepsilon_n h^n$ mit

$$
\varepsilon_n := \frac{1}{1 \vee \sqrt{\sum_{i=1}^{2^n} \left| x\left(\frac{i}{2^n}T\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}T\right)\right|}}.
$$

□

Bei den Integranden h^n ist es wesentlich, dass in $h^n_{(k-1)2^{-n}T}$ auch der Wert von $x_{k2^{-n}T}$ einfließt. Dies kann aber im allgemeinen stochastischen Fall der geforderten elementaren Vorhersehbarkeit der Elementarintegranden widersprechen.

Definition 3.14. *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ heißt quadratintegrierbar, wenn $E(X_t^2) < \infty$ für alle $t \in [0,T]$.*

Theorem 3.15. *Jedes quadratintegrierbare Martingal ist ein guter Integrator.*

Beweis. Vorüberlegung: Doob's Optional Sampling Theorem besagt: Sei X ein Martingal und $\tau_1 \le \tau_2$ $[0,T]$-wertige Stoppzeiten. Dann gilt $X_{\tau_1} = E(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})$, P-f.s. Mit der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte folgt $X_{\tau_1}^2 = (E(X_T \mid \mathcal{F}_{\tau_1}))^2 \le E(X_T^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1})$. Damit folgt aus $E(X_T^2) < \infty$, dass auch $E(X_{\tau_1}^2) < \infty$.

Sei $H \in \mathcal{S}$, mit $|H| \le M$, $M \in \mathbb{R}_+$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&E(I_X(H)^2) \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^n Z_{i-1}^2(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})^2\right] + \underbrace{2E\left[\sum_{i<j}^n Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})Z_{j-1}(X_{T_j} - X_{T_{j-1}})\right]}_{=0} \\
&= E\left[\sum_{i=1}^n Z_{i-1}^2(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})^2\right] \\
&\le M^2 E\left(\sum_{i=1}^n (X_{T_i} - X_{T_{i-1}})^2\right) \\
&= M^2 E\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_{T_i} - X_{T_{i-1}})\right)^2\right] \\
&= M^2 E\left[(X_T - x_0)^2\right]. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Die gemischten Terme fallen weg, da für $1 \leq i < j \leq n$ $X_{T_i} - X_{T_{i-1}}$ $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$-messbar ist und damit

$$\begin{aligned}
&E\left[Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})Z_{j-1}(X_{T_j} - X_{T_{j-1}})\right] \\
&= E\left[E\left[Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})Z_{j-1}(X_{T_j} - X_{T_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}}\right]\right] \\
&= E\left[Z_{i-1}(X_{T_i} - X_{T_{i-1}})Z_{j-1}\underbrace{E\left[(X_{T_j} - X_{T_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{T_{j-1}}\right]}_{=0}\right] = 0.
\end{aligned}$$

$H^n \to 0$ gleichmäßig impliziert damit, dass $I_X(H^n)$ gegen 0 in $L^2(P)$ konvergiert und damit in Wahrscheinlichkeit. □

Definition 3.16 (Lokalisierung). *Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $[0,T]$-wertigen Stoppzeiten mit $T_1 \leq T_2 \leq \ldots$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt lokalisierend, wenn $P(T_n = T) \to 1$ für $n \to \infty$. Der Prozess X^{T_n} mit $X_t^{T_n} := X_{t\wedge T_n}$ wird als gestoppter Prozess bezeichnet.*

Bemerkung 3.17. *Wichtig ist, dass der Endzeitpunkt T für jedes feste $\omega \in \Omega$ irgendwann erreicht (und nicht nur approximiert) wird. Die Folge $T_n = T - \frac{1}{n}$ ist nicht lokalisierend ! Schaut man sich Prozesse statt auf $[0,T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, auf $[0,\infty)$ an, so fordert man analog $P(T_n \geq t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $\forall t \in [0,\infty)$.*

Definition 3.18. *Ein stochastischer Prozess X ist ein lokales Martingal, wenn eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die gestoppten Prozesse X^{T_n}, für alle $n \in \mathbb{N}$ Martingale sind. Entsprechend ist ein Prozess X lokal beschränkt, wenn eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die gestoppten Prozesse X^{T_n} beschränkt sind.*

Allgemein kann man zu einer Klasse stochastischer Prozesse $\mathcal{C}$ die entsprechende lokale Klasse $\mathcal{C}_{\text{loc}}$ definieren, d.h. $X \in \mathcal{C}_{\text{loc}} \Leftrightarrow \exists$ lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X^{T_n} \in \mathcal{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 3.19. *Die Folge $T_n = T$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist lokalisierend (für Prozesse, die auf dem Zeitintervall $[0,T]$ definiert sind). Daher gilt $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{\text{loc}}$.*

In stetiger Zeit ist das klassische Beispiel eines lokalen Martingals, das kein echtes Martingal ist, der akkumulierte Handelsgewinn aus einer Verdoppelungsstrategie.

Beispiel 3.20 (Verdoppelungsstrategien). *Sei $(Y_i)_{i=\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d.-Folge von Laplace-Zufallsvariablen mit $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$. ξ_i bezeichne die Anzahl der Geldeinheiten, die der Spieler in das Spiel Y_i setzt. Wir nehmen an, dass er in der 1. Runde 1 Geldeinheit setzt. Wenn er verliert, verdoppelt er in der nächsten Runde seinen Einsatz. Sobald er das erste Mal gewinnt, hört er auf. Es gilt dann*

$$\xi_1 = 1 \quad \textit{und} \quad \xi_i = 2^{i-1}1_{\{Y_1=-1,\ldots,Y_{i-1}=-1\}} \quad \textit{für } i \geq 2$$

und der Gesamtgewinn beträgt

$$-1 - 2 - 2^2 - \ldots - 2^{k-2} + 2^{k-1} = 1 \quad \textit{für} \quad \arg\min\{i \mid Y_i = 1\} = k < \infty.$$

Da $P(Y_i = -1 \quad \forall i \in \mathbb{N}) = 0$ *gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i Y_i = 1, \quad P - f.s.$$

Der akkumulierte Gewinn kann wie folgt in ein zeistetiges Modell auf dem Zeitintervall $[0,1]$ *eingebettet werden:*

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i Y_i 1_{(1-2^{-i} \le t)}$$

Es wird also zu den Zeitpunkten $1/2, 3/4, 7/8, \ldots$ *gespielt.* X *ist offenbar ein càdlàg Prozess, da auf jedem Pfad nur endlich oft gespielt wird, existiert die Summe.*

Es gilt $X_0 = 0$ *und* $P(X_1 = 1) = 1$*. Also kann* X *kein Martingal sein.* X *ist jedoch (bzgl. seiner natürlichen Filtration* $\mathcal{F}^0(X)$*) ein lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge*

$$T_n := \begin{cases} 1 - 2^{-n} & : \quad \textit{wenn } Y_i = -1 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ \\ 1 & : \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

Bzgl. der Filtration $\mathcal{F}^0(X)$ *sind die* T_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, Stoppzeiten und es gilt* $P(T_n = 1) = 1 - (\frac{1}{2})^n$*. Zudem sind* X^{T_n} *Martingale, was daran liegt, dass höchstens* n*-mal gespielt wird.*

Um mit Verdoppelungsstrategien sichere Gewinne erzielen zu können, muss man potentiell unendlich lange spielen können müssen. Bei jedem konkreten Spiel ist dann trotzdem nach endlich vielen Runden Schluß. Ist die Anzahl der Runden beschränkt, kann man zwar keinen sicheren Gewinn erzielen, aber trotzdem mit einer sehen hohen Wahrscheinlichkeit gewinnen. Dies ist jedoch nur interessant, wenn es mehr um das ,,Gewinnen an sich" und weniger um den zu gewinnenden Betrag geht, da dieser im Vergleich zu dem möglichen Verlust sehr klein ist.

Theorem 3.21. *Jedes nach unten beschränkte lokale (Super-)Martingal ist ein Supermartingal.*

Beweis. Sei X ein lokales Supermartingal und o.B.d.A. $X \ge 0$. Es existiert also eine lokalisierende Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $E(X_t^{T_n}) < \infty$ und $E\left[1_A(X_{t \wedge T_n} - X_{s \wedge T_n})\right] \le 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \le s \le t \le T$, $A \in \mathcal{F}_s$.

Schritt 1: Zunächst zeigt man, dass $\forall t \in [0,T]$ X_t integrierbar ist. Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$E(X_t) \le \liminf_{n \to \infty} E(X_{t \wedge T_n}) \underset{\nwarrow \text{da } X^{T_n} \text{ Supermartingale}}{\le} \liminf_{n \to \infty} E(X_{0 \wedge T_n}) = E(X_{0 \wedge T_1}) < \infty$$

Schritt 2: Es gilt $1_A(X_{t \wedge T_n} - X_{s \wedge T_n}) \ge -X_s$.

Damit kann man Fatou auf die nichtnegative Folge $Z_n := 1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n}) + X_s$ anwenden und es folgt (da $E(X_s) < \infty$):

$$\begin{aligned}
&E(1_A(X_t - X_s)) = E\left(\lim_n [1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n}) + X_s]\right) - E(X_s)\\
&\le \liminf_{n\to\infty} E(1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n}) + X_s) - E(X_s)\\
&\le \liminf_{n\to\infty} E(1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n})) \le 0.
\end{aligned}$$

Damit ist X ein Supermartingal. □

Bemerkung 3.22. *In (endlicher) diskreter Zeit ist jedes nach unten beschränkte nichtnegative lokale Martingal sogar ein Martingal und nicht nur ein Supermartingal (siehe Skript) Der Unterschied im Zeitstetigen besteht darin, dass aus Schritt 1 im Beweis, nämlich $E(X_t) < \infty$ für alle $t \in [0,T]$,* nicht *folgt, dass $E(\sup_{t\in[0,T]} X_t) < \infty$. Damit gibt es keine integrierbare Majorante der punktweisen Konvergenz in Schritt 2.*

Korollar 3.23. *Jedes beschränkte lokale Martingal ist ein Martingal.*

Beweis. Man wende Theorem 3.21 auf X und $-X$ an. □

Theorem 3.24. *Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge und seien die gestoppten Prozesse X^{T_n}, $n \in \mathbb{N}$, gute Integratoren. Dann ist auch X ein guter Integrator.*

Beweis. Sei $(H^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge mit $H^m \to 0$ gleichmäßig auf $\Omega \times [0,T]$. Zu zeigen: $I_X(H^m) \to 0$ in Wkt., d.h.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \forall m \ge m_\varepsilon \qquad P(|I_X(H^m)| > \varepsilon) \le \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ auf der Menge $\{T_n = T\}$ gilt, dass $X_t^{T_n} = X_t$, $\forall t \in [0,T]$ (und damit $I_{X^{T_n}} = I_X$), folgt

$$P(|I_X(H^m)| > \varepsilon) \le P(|I_{X^{T_n}}(H^m)| > \varepsilon) + P(T^n < T), \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Wähle nun n_ε groß genug, so dass $P(T_{n_\varepsilon} < T) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Da $X^{T_{n_\varepsilon}}$ ein guter Integrator ist, gibt es ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \ge m_\varepsilon$

$$P(|I_{X^{T_{n_\varepsilon}}}(H^m)| > \varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt $P(|I_X(H^m)| > \varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $m \ge m_\varepsilon$ und damit die Behauptung. □

Theorem 3.25. *Die Menge der guten Integratoren bildet einen Vektorraum.*

Beweis. Es gilt $I_{\alpha X+\beta Y}(H^n) = \alpha I_X(H^n) + \beta I_Y(H^n)$. Da die Summe zweier Folgen, die jeweils in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergieren, ebenso in Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt, ist mit X und Y auch $\alpha X + \beta Y$ ein guter Integrator. □

Definition 3.26. *Ein adaptierter Prozess X mit càdlàg Pfaden ist ein Semimartingal, wenn er sich schreiben lässt als*

$$X = M + A, \tag{3.11}$$

wobei M ein lokales Martingal ist und A ein adaptierter Prozess von endlicher Variation.

Theorem 3.27 (Bichteler-Dellacherie)**.** *Die Menge der Semimartingale stimmt mit der Menge der guten Integratoren überein.*

Theorem 3.28 (Fundamental Theorem of Local Martingales)**.** *Sei M ein lokales Martingal und $c > 0$. Dann existieren lokale Martingale N und A mit $M = N + A$, so dass A von endlicher Variation ist und die Sprünge von N (dem Betrage nach) durch c beschränkt sind.*

Beweisansatz: Auf jedem Pfad besitzt M höchstens endlich viele Sprünge, die betragsmäßig größer als $c > 0$ sind (da Pfad càdlàg). Definiere

$$M^c := M - \sum_{s \leq \cdot} \Delta M_s 1_{\{|\Delta M_s| > c\}}.$$

Die Sprünge von M^c sind durch c beschränkt und der Prozess $\sum_{s \leq \cdot} \Delta M_s 1_{\{|\Delta M_s| > c\}}$ ist von endlicher Variation. Problem: M^c ist i.A. kein lokales Martingal mehr. Deshalb muss die Herausnahme der „großen" Sprünge durch eine Drift kompensiert werden. Der Beweis findet sich in Protter [4], Seite 102-104.

Korollar 3.29. *Jedes lokale Martingal lässt sich als Summe eines lokalen quadratintegrierbaren Martingals und eines Prozesses von endlicher Variation schreiben.*

Beweis. Sei M ein lokales Martingal. Nach Theorem 3.28 gilt $M = N + A$, wobei N lokales Martingal mit $|\Delta N| \leq 1$ und A Prozess von endlicher Variation. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ $T_n := \inf\{t \in [0,T] \mid |N_t| > n\} \wedge T$. Für die gestoppten Prozesse N^{T_n} gilt $|N^{T_n}| \leq (|N_0| \vee n) + c$, da $|N^{T_n}_-| \leq |N_0| \vee n$. Damit ist $E|N^{T_n}_t|^2 < \infty$, $\forall t \in [0,T]$. □

Beweis der einfachen Richtung von Theorem 3.27. Sei X ein Semimartingal, d.h. X besitzt eine Darstellung (3.11). Mit Theorem 3.12 ist A ein guter Integrator. Mit Korollar 3.29 lässt sich M als die Summe eines lokalen quadratintegrierbaren Martingals und eines Prozesses endlicher Variation schreiben. Die Summanden sind jeweils gute Integratoren (Theoreme 3.15 und 3.24 bzw. Theorem 3.12). Da die Menge der guten Integratoren einen Vektorraum bildet (siehe Theorem 3.25) ist auch die Summe X ein guter Integrator. □

Die Rückrichtung von Theorem 3.27 findet sich in Protter [4], Theorem III.43.

Wir wollen nun eine etwas stärkere Stetigkeit der Abbildung $H \mapsto J_X(H)$ zeigen als wir sie schon von der Abbildung $H \mapsto I_X(H)$ *gefordert* haben.

Definition 3.30. *Eine Folge von Prozessen* $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* H *gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit (uniformly in probability = "up"), wenn* $\sup_{t\in[0,T]} |H_t^n - H_t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *in Wahrscheinlichkeit.*

Interpretation: Konvergenz gilt gleichmäßig in $t \in [0,T]$, aber nicht unbedingt gleichmäßig in $\omega \in \Omega$.

Die up-Konvergenz ist offenbar *metrisierbar*, d.h. es existiert eine Metrik $d : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$, so dass für alle $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ und $Y \in \mathbb{D}$ folgende Äquivalenz gilt

$$Y^n \overset{\text{up}}{\to} Y,\ n\to\infty \Leftrightarrow d(Y^n, Y) \to 0,\ n\to\infty.$$

Wähle dazu

$$d(X,Y) := E\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| \wedge 1\right). \tag{3.12}$$

Genaugenommen müssen wir statt Prozessen *Äquivalenzklassen* von Prozessen betrachten. Dabei sind zwei Prozesse X und Y äquivalent, wenn sie ununterscheidbar sind. X, Y sind genau dann ununterscheidbar, d.h. $P(X_t = Y_t\ \forall t\in[0,T]) = 1$, wenn $d(X,Y) = 0$. Auf der Ebene der Äquivalenzklassen ist d damit tatsächlich eine Metrik.

Natürlich gibt es beliebig viele andere Metriken, die diese Aufgabe auch erfüllen würden.

Bemerkung 3.31. *Für einen metrischen Raum* (X,d) *gilt das folgende Teilfolgenkriterium. Für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *und* $x\in X$ *gilt*

$$d(x_n,x)\to 0,\ n\to\infty \Leftrightarrow \forall (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \exists (n_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \text{ mit } d(x_{n_{k_l}},x)\to 0,\ l\to\infty \tag{3.13}$$

d.h. wenn zu jeder Teilfolge eine konvergente Teilfolge mit dem gleichen Limes existiert, dann ist auch die Gesamtfolge konvergent.

Die P*-fast sichere Konvergenz ist offenbar nicht metrisierbar. Nehme dazu an,* $\widetilde{d}$ *sei eine Metrik, mit der man die* P*-fast sichere Konvergenz ableiten kann, d.h.*

$$Z_n \to Z, P\text{-f.s. } n\to\infty \Leftrightarrow \widetilde{d}(Z_n,Z)\to 0,\ n\to\infty.$$

Für eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, die stochastisch gegen* Z *konvergiert, existiert bekanntlich eine* P*-f.s. konvergente Teilfolge. Damit wäre die rechte Seite von (3.13) für* $\widetilde{d}$*,* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* Z *erfüllt und* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *müsste bereits* P*-f.s. gegen* Z *konvergieren, was i.A. nicht der Fall zu sein braucht (siehe etwa das Gegenbeispiel (3.123)).*

Definition 3.32. *Der Raum* $\mathcal{S}$ *der Elementarintegranden ausgestattet mit der Metrik (3.12) (also einer Metrik, die die gleichmäßige Konvergenz in Wahrscheinlichkeit metrisiert) wird mit* $\mathcal{S}_{\text{up}}$ *bezeichnet, also* $\mathcal{S}_{\text{up}} = (\mathcal{S}, d)$*. Analog* $\mathbb{D}_{\text{up}}$ *für die Prozesse mit càdlàg-Pfaden.*

Theorem 3.33. *Sei X ein guter Integrator. Dann ist die Abbildung $J_X : \mathcal{S}_{\mathrm{up}} \to \mathbb{D}_{\mathrm{up}}$ stetig, d.h. für alle $(H^n)_{n\in\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ und $H \in \mathcal{S}$ gilt die Implikation*

$$H^n \stackrel{\mathrm{up}}{\to} H \Rightarrow J_X(H^n) \stackrel{\mathrm{up}}{\to} J_X(H).$$

Beweis. Wegen Linearität, diesmal der Abbildung $H \mapsto J_X(H)$, reicht es aus, den Fall $H = 0$ zu betrachten.

Schritt 1: Wir wollen zunächst zeigen, dass für $H^n \in \mathcal{S}$ gilt:

$$H^n \to 0 \text{ gleichmäßig auf } \Omega \times [0,T] \Rightarrow J_X(H^n) \stackrel{\mathrm{up}}{\to} 0. \tag{3.14}$$

Sei $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge mit $H^n \to 0$ gleichmäßig auf $\Omega \times [0,T]$. Definiere nun für festes $\varepsilon > 0$ die Stoppzeitfolge

$$T_n := \inf\{t \geq 0 \mid |(H^n \bullet X)_t| > \varepsilon\} \wedge T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Der Prozess $t \mapsto (H^n \bullet X)_t = (J(H^n))_t$ ist càdlàg.) Damit ist $H^n 1_{[\![0,T_n]\!]} \in \mathcal{S}$ und die Folge $(H^n 1_{[\![0,T_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen Null. Da X ein guter Integrator ist, zieht dies

$$I_X(H^n 1_{[\![0,T_n]\!]}) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{in Wahrscheinlichkeit}, \tag{3.15}$$

nach sich. Für einen Prozess Y bezeichne

$$Y_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} |Y_s|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P((H^n \bullet X)_T^* > \varepsilon) &\underset{H^n\bullet X \text{ rechtsstetig}}{\leq} P(|H^n \bullet X_{T_n}| \geq \varepsilon) \\ &= P(|H^n 1_{[\![0,T_n]\!]} \bullet X_T| \geq \varepsilon) \\ &\stackrel{(3.15)}{\to} 0, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

(Wenn der Prozess $J_X(H^n)$ nicht rechtsstetig wäre, könnte es passieren, dass er durch einen Sprung erst unmittelbar nach T_n das Niveau ε überschreitet, aber zum Zeitpunkt T_n noch kleiner als ε wäre. Die Ungleichung in (3.16) wäre dann falsch)

Aus (3.16) folgt $J_X(H^n) \stackrel{\mathrm{up}}{\to} 0$, $n \to \infty$.

Schritt 2: Zeige nun: $H^n \stackrel{\mathrm{up}}{\to} 0 \Rightarrow J_X(H^n) \stackrel{\mathrm{up}}{\to} 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen Schritt 1 existiert ein $\eta > 0$, so dass $\forall H \in \mathcal{S}$

$$|H| \leq \eta \Rightarrow P((J_X(H))_T^* > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

(Wenn (3.17) nicht gölte, wäre Implikation (3.14) falsch). Definiere $R_n := \inf\{t \geq 0 \mid |H_t^n| > \eta\} \wedge T$. R_n ist offenbar eine Stoppzeit. Da H^n ein Elementarintegrand ist, ergibt sich dies direkt aus der Konstruktion von H^n. Bei einem allgemeinen stochastischen Prozess wäre dies eine Anwendung von Theorem 2.16 (das allerdings nur unter der gemachten Voraussetzung gilt, dass die Filtration rechtsstetig ist). Setze

$$\widetilde{H}^n := H^n 1_{[\![0,R_n]\!]}.$$

Es gilt $\widetilde{H}^n \in \mathcal{S}$ und $|\widetilde{H}^n| \leq \eta$ (weil H^n linksstetig und $H_0^n = 0$). Aus (3.17) folgt, dass $P((J_X(\widetilde{H}^n))_T^* > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Andererseits stimmen auf der Menge $\{R_n = T\}$ die Prozesse $\widetilde{H}^n$ und H^n überein. Wegen $H^n \stackrel{\text{up}}{\to} 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $P(R_n < T) \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Es folgt:

$$\begin{aligned} P(J_X(H^n)_T^* > \varepsilon) &\leq P(R_n < T) + P(J_X(\widetilde{H}^n)_T^* > \varepsilon) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \\ \Rightarrow \text{Beh.} & \end{aligned}$$

□

Definition 3.34. *Eine Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stochastischen Prozessen heißt up-Cauchy-Folge, wenn für d aus (3.12) gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N \quad d(X^n, X^m) \leq \varepsilon. \tag{3.18}$$

Offenbar ist (3.18) dazu äquivalent, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^n - X_t^m| > \varepsilon) \to 0, \quad n, m \to \infty. \tag{3.19}$$

Korollar 3.35. *[von Satz 3.33] Sei X ein guter Integrator. Dann gilt für alle $(H^n)_{n\in\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ die Implikation*

$$(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine up-Cauchy-Folge} \implies (J_X(H^n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine up-Cauchy-Folge.}$$

Beweis. Da die up-Konvergenz durch d metrisiert wird, folgt aus Satz 3.33

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall H \in \mathcal{S} \quad d(H, 0) \leq \delta \Rightarrow d(J_X(H), 0) \leq \varepsilon. \tag{3.20}$$

Wenn $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine up-Cauchy-Folge ist, wird $d(H^n - H^m, 0) = d(H^n, H^m)$ beliebig klein für n und m groß genug. Mit (3.20) gilt damit für jedes $\varepsilon > 0$, dass $d(J_X(H^n - H^m), 0) \leq \varepsilon$ für n und m groß genug. Aus der Linearität von J_X folgt $d(J_X(H^n), J_X(H^m)) \leq \varepsilon$. Damit ist $(J_X(H^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine up-Cauchy-Folge. □

Theorem 3.36. *Jede Cauchy-Folge bzgl. d besitzt einen Limes bzgl. d in $\mathbb{D}$, d.h. der Raum $\mathbb{D}_{\text{up}}$ ist vollständig.*

Beweis. Der Beweis ähnelt dem Beweis der Vollständigkeit von $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bzgl. der stochastischen Konvergenz. Zusätzlich muss gezeigt werden, dass sich die Pfadeigenschaften auf den Limesprozess übertragen.

Sei $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ eine up-Cauchy-Folge, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt $P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^n - X_t^m| > \varepsilon) \leq \varepsilon$ für n, m groß genug. Wir wollen zeigen, dass dann eine Teilfolge $(X^{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ existiert mit

$$P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| > 2^{-k}) \leq 2^{-k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Definiere n_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ rekursiv. Gegeben n_{k-1} sei n_k die kleinste natürliche Zahl $> n_{k-1}$, s.d. **für alle** $n, m \geq n_k$ gilt $P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^n - X_t^m| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}$ (wobei $n_0 := 0$ gesetzt wird, jedoch in (3.21) nicht eingeht). Die Existenz von $n_k \in \mathbb{N}$ ist durch (3.19) gewährleistet. Für die konstruierte Teilfolge gilt (3.21), da $n_{k+1}, n_k \geq n_k$ (man beachte, dass es nicht ausreichen würde, mit irgendwelchen $n_1 < n_2$ anzufangen, die $P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{n_2} - X_t^{n_1}| > 1/2) \leq 1/2$ erfüllen, da dann nicht sichergestellt ist, dass man zu diesem n_2 ein n_3 finden kann, das die entsprechende Bedingung erfüllt).

Aus Borel-Cantelli folgt

$$P\left(\underbrace{\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{n_{k+1}} - X_t^{n_k}| > 2^{-k} \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\right\}}_{=:A}\right) = 0. \tag{3.22}$$

Demnach ist für P-fast alle $\omega \in \Omega$ $(X^{n_k}(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm auf $[0, T]$. Die Menge der càdlàg Funktionen von $[0, T]$ nach $\mathbb{R}$ ist aber vollständig bzgl. der Supremumsnorm. Dies liegt an der Vollständigkeit der reellen Zahlen (für jedes feste t existiert ein Limes) und an der Tatsache, dass sich bei gleichmäßiger Konvergenz Rechtsstetigkeit und Existenz der linken Limiten auf die Grenzfunktion übertragen[¶]. Definiere den Prozess $X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ durch

$$X_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} X_t^{n_k}(\omega) & : \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und } \omega \notin A \quad (A \text{ aus } (3.22)) \\ 0 & : \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und } \omega \in A \end{cases}$$

X hat also überall càdlàg-Pfade. Die Menge A ist erstmal nur $\mathcal{F}_T$-messbar. Wegen der "usual conditions" ist A aber als Nullmenge auch $\mathcal{F}_0$-messbar. Da auf der Menge $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}_t$ X_t der punktweise Limes der $\mathcal{F}_t$-messbaren t-Schnitte $X_t^{n_k}$ ist, ist X_t $\mathcal{F}_t$-messbar, d.h. X ist adaptiert. Es gilt

$$P(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{n_k} - X_t| \to 0, \quad k \to \infty) \geq P(\Omega \setminus A) = 1. \tag{3.23}$$

[¶]Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von càdlàg Funktionen in der Zeit, die gleichmäßig gegen x konvergiert. Wir wollen zeigen, dass x dann auch càdlàg ist. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|x_k(s) - x(s)| \leq \varepsilon/3$ für alle $s \in [0, T]$. Zu t und ε existiert ein $\delta > 0$ mit $|x_k(s) - x_k(t)| \leq \varepsilon/3$ für alle $s \in [t, t + \delta]$. Es folgt $|x(s) - x(t)| \leq 3\varepsilon/3 = \varepsilon$ für alle $s \in [t, t + \delta]$ und damit Rechtsstetigkeit. Die Existenz und Endlichkeit des linken Limes von x in t folgt mit $\limsup_{s\uparrow t} x(s) \leq \limsup_{s\uparrow t} x_k(s) + \varepsilon/3 = \liminf_{s\uparrow t} x_k(s) + \varepsilon/3 \leq \liminf_{s\uparrow t} x(s) + 2\varepsilon/3$.

Die Teilfolge konvergiert also bzgl. d gegen X. Da die Gesamtfolge eine Cauchy-Folge ist, konvergiert auch die Gesamtfolge gegen X.

□

Definition 3.37. *Unter* $\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ *verstehen wir den Abschluss der Elementarintegranden unter der (metrisierbaren) Konvergenz „uniformly in probability", d.h.*

$$\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}} := \{H : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \ |\exists (H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S} \ s.t. H^n \to H \ \textit{uniformly in probability}\} .$$

Bemerkung 3.38. *Der Gesamtraum in Definition 3.37 bestehe aus allen Abbildungen* $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$. $H^n \overset{up}{\to} H$ *ist dann so zu verstehen, dass insbesondere die Größen* $\sup_{t\in[0,T]} |H_t^n - H_t|$ $\mathcal{F}$*-messbar sein sollen. Der Beweis von Theorem 3.36 zeigt aber bereits, dass alle approximierbaren Abbildungen adaptiert und linksstetig mit existierenden rechten Limiten sein müssen. Man könnte sich also auch von vorneherein auf diesen Grundraum beschränken. In diesem Fall wäre die Messbarkeit von* $\sup_{t\in[0,T]} |H_t^n - H_t|$ *sowieso gegeben.*

Korollar 3.35 und Theorem 3.36 erlauben uns die folgende Definition.

Definition 3.39. *Sei* X *ein guter Integrator,* $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ *und* $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ *eine Folge, die* H *approximiert, d.h.* $H^n \overset{\text{up}}{\to} H$. *Das stochastische Integral von* H *nach* X *wird als Limes (bzgl. d) der Cauchy-Folge der Elementarintegrale* $(J_X(H^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *definiert. Wir bezeichnen es wieder mit* $H \bullet X := J_X(H)$.

Bemerkung 3.40. *Es bleibt zu zeigen, dass* $J_X(H)$ *wohldefiniert ist, also die Definition nicht von der approximierenden Folge* $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *abhängt. Seien dazu* $(H^{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(H^{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen, die* H *uniformly in probability approximierend. Folglich konvergiert auch die "alternierende Folge"*

$$H^{3,n} := \begin{cases} H^{1,(n+1)/2} & : \quad \textit{für } n \textit{ ungerade} \\ H^{2,n/2} & : \quad \textit{für } n \textit{ gerade} \end{cases}$$

gegen H *uniformly in probability. Die alternierende Folge* $(H^{3,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist somit auch eine up-Cauchy Folge. Mit Korollar 3.35 ist die Folge* $(J_X(H^{3,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ *der zugehörigen Elementarintegrale eine Cauchy-Folge. Damit stimmen wegen der Dreiecksungleichung der Metrik d die Grenzwerte von* $(J_X(H^{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(J_X(H^{2,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ **bis auf Ununterscheidbarkeit** *überein.*

Die Abbildung $J_X : \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}} \to \mathbb{D}$ ist nun also definiert. Durch folgendes Theorem soll die Abbildung charakterisiert werden.

Theorem 3.41. J_X *ist die bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutige stetige Fortsetzung des Elementarintegrals aus Definition 3.2 auf die Integrandenmenge* $\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$, *wobei Stetigkeit bzgl. der up-Konvergenz zu verstehen ist. D.h. wenn man ununterscheidbare stochastische Prozesse miteinander identifiziert (Bildung von Äquivalenzklassen), ist* J_X *die einzige stetige Abbildung, die auf* $\mathcal{S}$ *mit dem Elementarintegral übereinstimmt.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Implikation

$$H^n \overset{\text{up}}{\to} H \implies (H^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine up-Cauchy-Folge}$$

und Korollar 3.35.

Für die Existenz muss noch gezeigt werden, dass auch die auf $\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ erweiterte Abbildung stetig bzgl. der up-Konvergenz ist. Sei dazu $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ und $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ mit $H^n \to H$ in up (nun muss also auch die approximierende Folge nicht mehr elementar sein). Die Idee besteht darin, Elementarstrategien zu finden, die sowohl nahe an H^n als auch nahe an H sind und dann die Definition der Fortsetzungsabbildung J_X anzuwenden. Sei $\varepsilon > 0$. Für festes (!) H (bereits oben vorgegeben) existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $G \in \mathcal{S}$ die Implikation

$$d(G, H) \leq \delta \implies d(J_X(G), J_X(H)) \leq \varepsilon/2 \tag{3.24}$$

gilt (Wenn die Implikation (3.24) nicht gölte, gäbe es eine Folge von Elementarintegranden, die gegen H konvergiert und bei der die entsprechende Cauchy-Folge von Elementarintegralen nicht gegen $J_X(H)$ konvergiert. Dies kann nicht sein, vgl. Bemerkung 3.40).

Nehme ein solches $\delta > 0$. Für $n \geq n(\delta)$ gilt $d(H^n, H) \leq \delta/2$. Da $H^n \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Definition von $J_X(H^n)$ existiert zu jedem H^n ein $G^n \in \mathcal{S}$, so dass sowohl $d(G^n, H^n) \leq \delta/2$ als auch

$$d(J_X(G^n), J_X(H^n)) \leq \varepsilon/2. \tag{3.25}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(G^n, H) \leq \delta$ für alle $n \geq n(\delta)$ und mit (3.24)

$$d(J_X(G^n), J_X(H)) \leq \varepsilon/2. \tag{3.26}$$

Aus (3.25), (3.26) folgt wieder mit der Dreiecksungleichung

$$d(J_X(H^n), J_X(H)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n(\delta).$$

Damit gilt $J_X(H^n) \to J_X(H)$ uniformly in probability. □

Theorem 3.42. *Die Menge $\mathcal{S}$ der elementaren Integranden liegt dicht (bzgl. der von der metrisierbaren up-Konvergenz erzeugten Topologie) in der Menge $\mathbb{L}_0$ der adaptierten càglàd ("linksstetig mit existierenden endlichen rechten Limiten") Prozesse mit Startwert 0, also $\mathbb{L}_0 \subset \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$. Außerdem gilt $\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}} \subset \mathbb{L}_0$, also $\overline{\mathcal{S}_{\text{up}}} = \mathbb{L}_0$.*

Folge: Das Integral $H \bullet X$ ist für $H \in \mathbb{L}_0$ und X guter Integrator im Sinne von Definition 3.4 definiert.

Beweis von Theorem 3.42. Ad „$\supset$": Sei $Y \in \mathbb{L}_0$. Der Prozess $Y_+ = (Y_{t+})_{t\in[0,T]}$ bezeichne die rechtsstetige Abänderung von Y, d.h. $Y_{t+} := \lim_{s\to t,\, s>t} Y_s$. Offenbar gilt $Y_+ \in \mathbb{D}$. Für $\varepsilon > 0$ definiere: $T_0^\varepsilon := 0$ und

$$T_{n+1}^\varepsilon := \inf\{t > T_n^\varepsilon \mid |Y_{t+} - Y_{T_n^\varepsilon +}| > \varepsilon\} \wedge T, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$Y^{n,\varepsilon} := \sum_{i=1}^{n} Y_{T^\varepsilon_{i-1}+} 1_{]\!]T^\varepsilon_{i-1}, T^\varepsilon_i]\!]}. \tag{3.27}$$

Für $T^\varepsilon_{i-1} < t \leq T^\varepsilon_i$ gilt aber $|Y_t - Y_{T^\varepsilon_{i-1}+}| \leq \varepsilon$. Damit gilt für festes $\omega \in \Omega$ die Implikation

$$T^\varepsilon_n(\omega) = T \Rightarrow \sup_{t\in[0,T]} |Y_t(\omega) - Y^{n,\varepsilon}_t(\omega)| \leq \varepsilon. \tag{3.28}$$

Andererseits folgt aus Y càglàd, dass $\forall \varepsilon > 0$

$$P(T^\varepsilon_n = T) \to 1 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{3.29}$$

D.h. die Folge $(T^\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokalisierend. Würde die Folge $(T^\varepsilon_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ den Endzeitpunkt T nicht erreichen, wäre dies wegen $T^\varepsilon_1(\omega) < T^\varepsilon_2(\omega) < \ldots$ ein Widerspruch zur Linksstetigkeit des Pfades $t \mapsto Y_t(\omega)$ zum Zeitpunkt $\lim_{n\to\infty} T^\varepsilon_n(\omega) \leq T$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Wähle $\varepsilon = 1/k$. Wegen (3.29) existiert ein $n(k) \in \mathbb{N}$, so dass $P(T^{1/k}_{n(k)} < T) \leq 1/k$. Für $Y^{n(k),1/k} \in \mathcal{S}$ aus (3.27) gilt

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y^{n(k),1/k}_t - Y_t| > 1/k\right) \overset{(3.28)}{\leq} P(T^{1/k}_{n(k)} < T) \leq 1/k.$$

Es gilt also $Y^{n(k),1/k} \overset{\text{up}}{\to} Y$, $k \to \infty$, und damit $Y \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$.

Ad „$\subset$": Nehme an, Y lässt sich *gleichmäßig in der Zeit* durch eine Folge von Elementarfunktionen $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximieren. Die Linksstetigkeit von Y^n und die Existenz rechter Limiten übertragen sich offenbar auf den Limesprozess Y (analog zur Fußnote im Beweis von Theorem 3.36). □

Beispiel 3.43. *Sei B eine Standard-Brownsche Bewegung. Das Integral $B \bullet B_t =: \int_0^t B_s\, dB_s$ ist also wegen der (Links-)Stetigkeit von B schonmal definiert. Um das Integral $\int B_s\, dB_s$ zu berechnen, betrachten wir zunächst eine Approximation von B, nämlich*

$$B^n_u := \sum_{k=1}^{2^n} B_{\frac{k-1}{2^n}T} 1_{(\frac{k-1}{2^n}T, \frac{k}{2^n}T]}(u), \quad u \in [0,T]. \tag{3.30}$$

Es gilt $B^n \in \mathcal{S}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Pfade von B folgt $B^n \overset{\text{up}}{\to} B$ für $n \to \infty$. Sei t ein Gitterpunkt, d.h. $t = \frac{k_0}{2^{n_0}}T$ für $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ (und damit für alle $n \geq n_0$ entsprechend). Wegen $b^2 - a^2 - (b-a)^2 = -2a^2 + 2ba = 2a(b-a)$ gilt mit

$a := B_{\frac{k-1}{2^n}T}$ und $b := B_{\frac{k}{2^n}T}$:

$$\begin{aligned}
J_B(B^n)_t &= \sum_{k=1 \ mit \ k2^{-n}T \leq t}^{2^n} B_{\frac{k-1}{2^n}T}(B_{\frac{k}{2^n}T} - B_{\frac{k-1}{2^n}T}) \\
&= \sum_{k=1 \ mit \ k2^{-n}T \leq t} \left[\tfrac{1}{2}(B^2_{\frac{k}{2^n}T} - B^2_{\frac{k-1}{2^n}T}) - \tfrac{1}{2}(B_{\frac{k}{2^n}T} - B_{\frac{k-1}{2^n}T})^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\,B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1 \ mit \ k2^{-n}T \leq t}^{2^n} (B_{\frac{k}{2^n}T} - B_{\frac{k-1}{2^n}T})^2 \\
&= I_1 - I_2, \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

wobei $n \geq n_0$. Nach Theorem 2.34 konvergiert I_2 P-f.s. gegen $\frac{1}{2}t$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} J_B(B^n)_t = \frac{1}{2}\,B_t^2 - \frac{1}{2}t, \quad P - f.s. \qquad (3.32)$$

Andererseits konvergiert wegen der Stetigkeit des Integrals $H \mapsto J_B(H)$ die Folge $J_B(B^n)_t$ stochastisch gegen $J_B(B)_t$. Aus der Eindeutigkeit des stochastisches Limes folgt $P(J_B(B)_t = \frac{1}{2}\,B_t^2 - \frac{1}{2}t) = 1$ für alle Gitterpunkte t. Da die Gitter dicht in $[0,T]$ liegen, folgt aus der Rechtsstetigkeit der Prozesse $t \mapsto \frac{1}{2}\,B_t^2 - \frac{1}{2}t$ und $t \mapsto J_B(B)_t$ die Ununterscheidbarkeit, d.h.

$$P\left(J_B(B)_t = \frac{1}{2}\,B_t^2 - \frac{1}{2}t, \quad \forall t \in [0,T]\right) = 1.$$

Im Gegensatz dazu folgt für einen stetigen Prozess $(A_t)_{t\in[0,T]}$ von endlicher Variation mit $A_0 = 0$, dass

$$A \bullet A_t = \tfrac{1}{2}A_t^2 \qquad (3.33)$$

(mit der Rechnung in (3.31), wenn man berücksichtigt, dass für stetige Prozesse von endlicher Variation der Ausdruck I_2 für n gegen ∞ gegen 0 konvergiert)

Bemerkung 3.44. *Die Rechnung in (3.31) liefert uns eine weitere interessante Einsicht. Wenn B (statt einer Brownschen Bewegung) ein beliebiger stetiger guter Integrator ist, dann konvergiert B^n aus (3.30) nach wie vor in up gegen B und damit ist $J_B(B^n)$ eine up-Cauchy Folge. Folglich muss auch der Limes von*

$$\sum_{k=1}^{2^n}(B_{\frac{k}{2^n}T} - B_{\frac{k-1}{2^n}T})^2$$

für $n \to \infty$ existieren, d.h.:

Für stetige gute Integratoren existiert die quadratische Variation.

Der Limes existiert auch für unstetige gute Integratoren. Dies ist allerdings an dieser Stelle noch nicht klar, da dann B^n zwar punktweise aber nicht mehr in up gegen B_- konvergieren muss.

Betrachte einen Finanzmarkt, der aus einem risikolosen Wertpapier $S^0 = 1$ und einem Wertpapier S besteht. S soll ein **stetiger stochastischer Prozess von endlicher Variation** sein (also inbesondere ein guter Integrator). Handelsstrategien sind adaptierte linksstetige Integranden H und das entwickelte stochastische Integral $H \bullet S$ modelliert die akkumulierten Handelsgewinne.

Proposition 3.45. *Wenn S stetig, von endlicher Variation und nicht P-f.s. konstant ist, dann gibt es eine Handelsstrategie H mit $P(H \bullet S_T \geq 0) = 1$ und $P(H \bullet S_T > 0) > 0$, also eine Arbitragemöglichkeit.*

Beweis. Wenn S nicht P-f.s. konstant ist, dann existiert ein $t_0 \in (0, T]$ mit $P(S_{t_0} \neq S_0) > 0$. Wähle nun $H_t = (S_t - S_0)1(t \leq t_0)$. Aus (3.33) angewandt auf $A = S - S_0$ folgt

$$H \bullet S_T = (S - S_0) \bullet (S - S_0)_{t_0} = \frac{1}{2}\left(S_{t_0} - S_0\right)^2 \quad \begin{cases} \geq 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1 \\ \\ > 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } > 0 \end{cases}$$

□

Bemerkung 3.46. *Bei einem Preisprozess von verschwindender quadratischer Variation ist es also vorteilhaft, bei steigenden Preisen nachzukaufen und bei fallenden Preisen die Position zu reduzierem. Wenn die quadratische Variation dagegen explodiert, also*

$$\sum_{k=1}^{2^n} (S_{\frac{k}{2^n}T} - S_{\frac{k-1}{2^n}T})^2 \to \infty \quad \textit{für } n \to \infty, \tag{3.34}$$

ist es vorteilhaft, bei steigenden Preisen zu reduzieren und bei fallenden Preisen nachzukaufen. Da S mit (3.34) kein Semimartingal sein kann, betrachten wir nur Elementarintegranden H^n, und zwar $H^n_t = -(S_{(k-1)2^{-n}} - S_0)$ für $t \in ((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$. Mit der Rechnung in (3.31) folgt

$$H^n \bullet S_T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} (S_{\frac{k}{2^n}T} - S_{\frac{k-1}{2^n}T})^2 - \frac{1}{2}(S_T - S_0)^2.$$

Für $n \to \infty$ stehen beschränkten Verlusten explodierende Gewinne gegenüber.

Eigenschaften des Integrals $H \bullet X$

(a) Sei τ eine $[0,T]$-wertige Stoppzeit. Dann gilt

$$(H \bullet X)^\tau = (H1_{[\![0,\tau]\!]}) \bullet X = H \bullet (X^\tau).$$

(b) Der Sprungprozess des Integrals, also der Prozess $s \mapsto \Delta(H \bullet X)_s$, ist ununterscheidbar von dem Prozess $s \mapsto H_s(\Delta X_s)$.

(c) Assoziativität: Der Prozess $H \bullet X$ ist selber wieder ein guter Integrator im Sinne von Definition 3.4 und für $G \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ gilt

$$G \bullet (H \bullet X) = (GH) \bullet X.$$

(d) Wenn H beschränkt und X ein quadratintegrierbares Martingal ist, dann ist auch $H \bullet X$ ein quadratintegrierbares Martingal.

(e) Wenn X ein lokal quadratintegrierbares Martingal ist (d.h. $\exists$ lokalisierende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $E((X_T^{T_n})^2) < \infty$ und X^{T_n} Martingal $\forall n \in \mathbb{N}$), dann ist auch $H \bullet X$ ein lokal quadratintegrierbares Martingal.

Bemerkung 3.47. *In dieser Vorlesung führen wir das Integral formal nur für $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ ein, d.h. für $H \in \mathbb{L}$. Die Abbildung $H \bullet X$ lässt sich jedoch noch sehr viel weiter fortsetzen (was allerdings entsprechend aufwendiger zu zeigen ist). Insbesondere lässt sich $H \bullet X$ für alle lokal beschränkten vorhersehbaren Prozesse H definieren (wenn X ein guter Integrator ist). Eigenschaften (a)-(d) gelten auch für das "allgemeine" stochastische Integral. Bei (e) muss noch gefordert werden, dass der Integrand H lokal beschränkt ist (was Prozesse aus $\mathbb{L}_0$ sowieso sind).*

Bemerkung 3.48. *Bei Eigenschaft (e) kann man auch auf "quadratintegrierbar" verzichten, d.h. jedes Integral mit lokal beschränktem Integranden nach einem lokalen Martingal ist ein lokales Martingal (Der Beweis bedürfte aber mehr Vorarbeit). Wenn man für H Beschränktheit fordert, dann folgt aus X quadratintegrierbares Martingal, dass $H \bullet X$ quadratintegrierbares Martingal. Aus H beschränkt und X Martingal folgt aber* nicht *$H \bullet X$ Martingal.*

Beweis. Die Aussagen (a) und (b) gelten offensichtlich für $H \in \mathcal{S}$. Für $H \in \overline{\mathrm{S}_{\text{up}}}$ folgen sie durch Grenzübergang (Stetigkeit des Integrals). Bei (a) wird benutzt, dass mit X auch der abgestoppte Prozess X^τ ein guter Integrator ist:

Ad (a): Sei $H = \sum_{i=1}^n Z_{i-1} 1_{]\!]T_{i-1},T_i]\!]}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n Z_{i-1}\left(X_{T_i\wedge(t\wedge\tau)} - X_{T_{i-1}\wedge(t\wedge\tau)}\right) &= \sum_{i=1}^n Z_{i-1}\left(X_{(T_i\wedge\tau)\wedge t} - X_{(T_{i-1}\wedge\tau)\wedge t}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n Z_{i-1}\left(X^\tau_{T_i\wedge t} - X^\tau_{T_{i-1}\wedge t}\right), \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Der mittlere Ausdruck ist offenbar das Elementarintegral des Integranden $\sum_{i=1}^n Z_{i-1} 1_{\rrbracket T_{i-1}\wedge\tau, T_i\wedge\tau\rrbracket} = H1_{\llbracket 0,\tau\rrbracket}$.

Ad (b): Sei $H = \sum_{i=1}^n Z_{i-1} 1_{\rrbracket T_{i-1}, T_i\rrbracket}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta(H \bullet X) := H \bullet X - (H \bullet X)_- &= \sum_{i=1}^n \big(Z_{i-1} 1_{\rrbracket T_{i-1}, T_i\rrbracket}(X - X_-)\big) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n Z_{i-1} 1_{\rrbracket T_{i-1}, T_i\rrbracket}\right) \Delta X \\ &= H\Delta X.\end{aligned}$$

Ad (c): *Schritt 1:* Sei zunächst $G \in \mathcal{S}$ (d.h. das Integral $J_Y(G) = J_{H\bullet X}(G)$ ist auf jeden Fall definiert, auch wenn Y kein Semimartingal wäre). Für $H \in \mathcal{S}$ und X Semimartingal gilt

$$J_Y(G) = J_X(GH), \tag{3.35}$$

d.h. die Aussage gilt, wenn sowohl G also auch H elementar sind (lässt sich schnell nachrechnen).

Schritt 2: Sei $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ und $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $H^n \stackrel{\text{up}}{\to} H$ für $n \to \infty$. Da X ein guter Integrator ist, konvergiert der Prozess $J_X(H^n)$ gegen $J_X(H)$ in up. Damit existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sup_{t\in[0,T]} |J_X(H^{n_k})_t - J_X(H)_t| \to 0 \ P\text{-f.s. } k \to \infty. \tag{3.36}$$

Setze $Y^{n_k} := J_X(H^{n_k})$. Sei $G \in \mathcal{S}$. $J_Y(G)$ ist damit auf jeden Fall definiert, auch wenn wir noch nicht gezeigt haben, dass Y ein guter Integrator ist. Es gilt

$$\begin{aligned}J_Y(G) &\stackrel{(3.36)}{=} \lim_{k\to\infty} J_{Y^{n_k}}(G) \\ &\stackrel{(3.35)}{=} \lim_{k\to\infty} J_X(GH^{n_k}) \\ &= J_X(GH).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $(GH^{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, $GH^{n_k} \stackrel{\text{up}}{\to} GH$ (die Konvergenz $G^n \stackrel{\text{up}}{\to} 0$ zieht die Konvergenz $G^nH \stackrel{\text{up}}{\to} 0$ nach sich) und X ein guter Integrator ist. Wir haben also gezeigt, dass

$$J_Y(G) = J_X(GH) \quad \forall G \in \mathcal{S}, H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}. \tag{3.38}$$

Da die Konvergenz $G^n \stackrel{\text{up}}{\to} 0$ die Konvergenz $G^nH \stackrel{\text{up}}{\to} 0$ nach sich zieht, folgt aus (3.38), dass der Prozess $Y = J_X(H)$ ein guter Integrator ist. Die Aussage (3.38) lässt sich nun wegen der gezeigten Stetigkeit von J_Y auf alle $G \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ fortsetzen.

Ad d: Sei $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ beschränkt und X quadratintegrierbar. Die den Integranden approximierende Folge $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ kann dann auch *gleichmäßig* beschränkt gewählt werden (in $n \in \mathbb{N}$). Es existiert also ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|H^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $H^n \bullet X$ ist dann offenbar ein Martingal (wegen H^n elementar kann man das schnell nachrechnen, dies geht genauso wie in der zeitdiskreten Vorlesung). Des weiteren gilt für alle $0 \leq s \leq t \leq T$, $A \in \mathcal{F}_s$ (gleiche Abschätzung wie in (3.10))

$$
\begin{aligned}
E\left(1_A(H^n \bullet X_t - H^n \bullet X_s)^2\right) &= E\left(1_A \sum_{j=1}^{k_n} \left(H^n_{T_{j-1}+}\right)^2 \left(X_{T_j^n \wedge t} - X_{(T_{j-1}^n \vee s)\wedge T_j^n \wedge t}\right)^2\right) \\
&\leq M^2 E\left(\sum_{j=1}^{k_n} \left(X^2_{t\wedge T_j^n} - X^2_{(T_{j-1}^n \vee s)\wedge T_j^n \wedge t}\right)\right) \\
&\leq M^2\left(E(X_t^2) - E(X_s^2)\right) \\
&\leq M^2\left(E(X_T^2) - x_0^2\right) < \infty, \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

wobei $(T_j^n)_{j=1,\ldots,k_n}$ die Stoppzeiten in der Darstellung von H^n sind, also

$$H^n := \sum_{j=1}^{k_n} H^n_{T_{j-1}+} 1_{]\!]T_{j-1}^n, T_j^n]\!]}.$$

Für die Abschätzung (3.39) braucht man offenbar die geforderte Quadratintegrierbarkeit von X. Damit ist für feste $0 \leq s \leq t \leq T$, $A \in \mathcal{F}_s$ die Familie von Zufallsvariablen $(1_A(H^n \bullet X_t - H^n \bullet X_s))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar[‖]. Aus $E\left(1_A(H^n \bullet X_t - H^n \bullet X_s)\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und der stochastischen Konvergenz der Elementarintegrale folgt somit wegen gleichgradiger Integrierbarkeit

$$E\left(1_A(H \bullet X_t - H \bullet X_s)\right) = 0.$$

Damit ist $H \bullet X$ schonmal ein Martingal. Wir wollen aber noch Quadratintegrierbarkeit zeigen. Aus der stochastischen Konvergenz der Elementarintegrale folgt die Existenz einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $H^{n_k} \bullet X_t$ *P-fast sicher* gegen $H \bullet X_t$ konvergiert. Mit dem Lemma von Fatou gilt

$$
\begin{aligned}
E\left((H \bullet X_t)^2\right) &= E\left(\liminf_{k\to\infty} (H^{n_k} \bullet X_t)^2\right) \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} E\left((H^{n_k} \bullet X_t)^2\right) \\
&\overset{(3.39)}{\leq} M^2\left(E(X_t^2) - x_0^2\right).
\end{aligned}
$$

Also ist $H \bullet X$ ein quadratintegrierbares Martingal.

[‖]Eine Folge von Zufallsvariablen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\varphi(x)/x \to \infty$ für $x \to \infty$ gibt, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(\varphi(|Z_n|)) < \infty$ (Übungsaufgabe in der Vorlesung Integrationstheorie).

Ad e: Jedes $H \in \overline{\mathcal{S}_{\mathrm{up}}}$ ist *lokal beschränkt* (mit lokalisierender Folge $T_n^1 := \inf\{t \geq 0 \mid |H_t| > n\} \wedge T$). Sei zudem $(T_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, s.d. $(X^{T_n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ quadratintegrierbare Martingale sind. Aus (d) folgt somit, dass

$$(H1_{[\![0,T_n^1]\!]}) \bullet X^{T_n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ quadratintegrierbare Martingale sind. Aus (a) folgt

$$(H1_{[\![0,T_n^1]\!]}) \bullet X^{T_n^2} = (H \bullet X)^{T_n^1 \wedge T_n^2}.$$

Da mit $(T_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Minimumsfolge $(T_n^1 \wedge T_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalisierend ist, folgt Eigenschaft (e). □

Definition 3.49. *Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Gittern gegeben durch $\sigma_n := (T_0^n, T_1^n, \ldots, T_{k_n}^n)$, wobei $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n = T$, Stoppzeiten und $k_n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Identität konvergiert, wenn*

$$\|\sigma_n\| := \max_{i=1,\ldots,k_n} |T_i^n - T_{i-1}^n| \stackrel{n\to\infty}{\to} 0 \ P\text{-f.s.}$$

Sei Y ein beliebiger stochastischer Prozess und σ eine zufällige Partition mit $\sigma = (T_0, T_1, \ldots, T_k)$. Mit $Y^{(\sigma)}$ bezeichnen wir den folgenden elementar vorhersehbaren Prozess

$$Y^{(\sigma)} : (\omega, t) \mapsto \sum_{i=1}^{k} Y_{T_{i-1}}(\omega) 1_{]\!]T_{i-1},T_i]\!]}(\omega, t),$$

wobei $\sigma := (T_0, T_1, \ldots, T_k)$. Für das dazugehörige Elementarintegral gilt also

$$Y^{(\sigma)} \bullet X = \sum_{i=1}^{k} Y_{T_{i-1}} (X^{T_i} - X^{T_{i-1}}).$$

Theorem 3.50. *Sei X ein Semimartingal und Y ein Prozess aus $\mathbb{D}$ oder $\mathbb{L}$. Für eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zufälligen Partitionen, die gegen die Identität konvergiert, gilt*

$$Y^{(\sigma_n)} \bullet X \stackrel{n\to\infty}{\to} Y_- \bullet X \quad \textit{up (“uniformly in probability”)}$$

Proof. Theorem 21, Seite 57 in Protter [4]. □

Achtung: Theorem 3.50 ist nicht ,,trivial” da, i.A. $Y^{(\sigma_n)} \stackrel{\mathrm{up}}{\not\to} Y_-$, $n \to \infty$. Die Konvergenz gilt zwar punktweise, aber i.A. nicht gleichmäßig in der Zeit (wenn Y stetige Pfade besitzt, dann gilt die Konvergenz gleichmäßig in der Zeit).

3.2 Quadratische Variation eines Semimartingals

Definition 3.51. *Seien X, Y Semimartingale (also insbesondere aus $\mathbb{D}$). Der quadratische Variationsprozess von X wird definiert durch*

$$[X,X] := X^2 - X_0^2 - 2X_- \bullet X. \tag{3.40}$$

Analog ist die quadratische Kovariation von X und Y definiert durch

$$[X,Y] := XY - X_0Y_0 - X_- \bullet Y - Y_- \bullet X.$$

Aus der Bilinearität und der Symmetrie der Abbildung $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ folgt:

$$[X,Y] = \tfrac{1}{2}([X+Y,X+Y] - [X,X] - [Y,Y]) \tag{3.41}$$

("Polarisierungsidentität")

Beispiel 3.52. *Sei B eine Standard-Brownsche Bewegung. Mit Beispiel 3.43 gilt*

$$[B,B]_t = B_t^2 - 2B \bullet B_t = B_t^2 - (B_t^2 - t) = t, \quad \forall t \geq 0.$$

Die in (3.40) formal eingeführte quadratische Variation stimmt also für die Brownsche Bewegung mit dem Limes der quadratischen Schwankungen entlang eines (immer feiner werdenden) Gitters überein (siehe Theorem 2.34). (3.40) entspricht also dem, was man anschaulich als die quadratische Variation eines Prozesses bezeichnen würde. Dies gilt auch für beliebige (Semi-)Martingale, wie das folgende Theorem 3.53 zeigt. Insbesondere existiert für Semimartingale der Limes der quadratischen Schwankungen entlang einer Folge von immer feiner werdenden Gittern (für beliebige Prozesse muss dieser Limes natürlich nicht existieren).

Theorem 3.53. *Sei X ein Semimartingal. Die quadratische Variation von X ist ein càdlàg, nicht-fallender, adaptierter Prozess. Des weiteren gilt*

(i) $[X,X]_0 = 0$ *und* $\underbrace{\Delta[X,X]}_{\Delta[X,X]_t = [X,X]_t - [X,X]_{t-}} = (\Delta X)^2$

(ii) Für eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zufälligen Partitionen, die gegen die Identität konvergiert, gilt

$$\sum_{i=1}^{k_n} (X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n})^2 \to [X,X], \quad n \to \infty, \text{ up.}, \tag{3.42}$$

wobei σ_n durch $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n = T$ gegeben ist.

(iii) Wenn τ eine Stoppzeit ist, dann gilt $[X^\tau, X] = [X, X^\tau] = [X^\tau, X^\tau] = [X,X]^\tau$.

Beweis. Da $X_- \bullet X$ als stochastisches Integral ein adaptierter Prozess mit càdlàg Pfaden ist, ist auch $[X,X]$ adaptiert und càdlàg.

Ad(i): Mit Eigenschaft b.) des Integrals gilt

$$\Delta(X_- \bullet X) = X_- \Delta X.$$

Zusammen mit der schonmal benutzen Gleichung $b^2 - a^2 - 2a(b-a) = (b-a)^2$ folgt

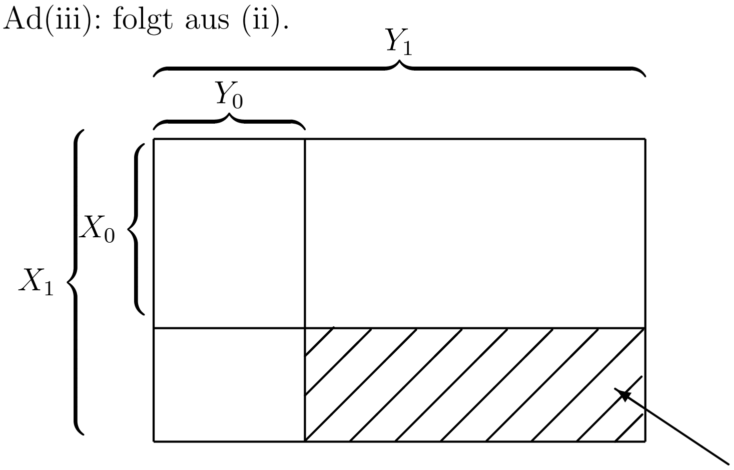
$$\begin{aligned}
\Delta[X,X]_t &\overset{\text{Eigenschaft b., \& Definition von } [X,X]}{=} \Delta(X^2)_t - 2X_{t-}(\Delta X_t) \\
&= X_t^2 - X_{t-}^2 - 2X_{t-}(X_t - X_{t-}) \\
&= (X_t - X_{t-})^2 \\
&= (\Delta X_t)^2.
\end{aligned}$$

Ad(ii): Wiederum mit der Gleichung $(b-a)^2 = b^2 - a^2 - 2a(b-a)$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k_n} (X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n})^2 &= \sum_{i=1}^{k_n} \left[\left(X^{T_i^n}\right)^2 - \left(X^{T_{i-1}^n}\right)^2\right] - 2\sum_{i=1}^{k_n} \left[(X^{T_{i-1}^n}\left(X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n}\right)\right] \\
&= (X^T)^2 - X_0^2 - 2\underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} \left[X^{T_{i-1}^n}\left(X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n}\right)\right]}_{\overset{\text{up}}{\to} X_- \bullet X \text{ nach Theorem 3.50}} \\
&\to X^2 - X_0^2 - 2X_- \bullet X, \; n \to \infty, \; \text{up}.
\end{aligned}$$

Aus (ii) folgt die Monotonie des Prozesses $[X,X]$. Sei dazu $s \leq t$. Jede Partition von $[0,s]$ kann zu einer Partition von $[0,t]$ fortgesetzt werden, so dass die rechte Seite von (3.42) mit der Zeit höchstens größer wird.

Ad(iii): folgt aus (ii). $\square$



$$X_1Y_1 = X_0Y_0 + Y_0(X_1 - X_0) + X_0(Y_1 - Y_0) + \overbrace{[X,Y]_1}^{=\Delta X_1 \Delta Y_1}$$

Korollar 3.54. *Der Prozess $[X,Y]$ hat endliche Variation und ist damit ein Semimartingal.*

Beweis. Folgt aus der Monotonie von $[X,X]$ und der *Polarisierungsidentität* $[X,Y] = \frac{1}{2}([X+Y,X+Y] - [X,X] - [Y,Y])$. $\square$

Korollar 3.55. *Die Menge der Semimartingale bildet eine Algebra (weil XY Semimartingal).*

Beweis. $[X,Y]$ Semimartingal $\Rightarrow$ XY Semimartingal. $\square$

Bemerkung 3.56. *Da der Prozess $[X,X]$ càdlàg, nicht-fallend und $\Delta[X,X]_t = (\Delta X_t)^2$, $t \geq 0$, können wir ihn (pfadweise) in einen stetigen Anteil und einen "reinen Sprunganteil" zerlegen, d.h.*

$$[X,X]_t = [X,X]_t^c + \sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2, \quad t \geq 0. \tag{3.43}$$

Definiere dazu den stetigen Anteil $[X,X]^c$ durch

$$[X,X]_t^c := \lim_{n\to\infty} \left([X,X]_t - \sum_{0<s\leq t,\ |\Delta X_s|>1/n} (\Delta X_s)^2 \right). \tag{3.44}$$

Man beachte, dass es i.A. keinen ersten Sprung des Prozesses X auf $[0,T]$ gibt. Es kann schon unendlich viele (sehr kleine) Sprünge in der Umgebung der Null geben (dies ist noch kein Widerspruch zur Rechtsstetigkeit von X in 0). Es gibt also keine kanonische Reihenfolge, die Sprünge zu summieren.

Da es aber nur endlich viele Sprünge dem Betrage nach größer als $1/n$ gibt, ist der Ausdruck $\sum_{0<s\leq t,\ |\Delta X_s|>1/n} (\Delta X_s)^2$ wohldefiniert. Wegen $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$ kompensiert man gerade die größeren Sprünge des Variationsprozesses und die Differenz ist wegen der Monotonie von $[X,X]$ nichtnegativ. Da zudem die Differenz monoton fallend in n

ist, existiert der Limes. Die (möglicherweise unendliche) Summe $\sum_{0<s\leq t}(\Delta X_s)^2$ ist also absolut konvergent und beschränkt durch $[X,X]_t$[*]*. Möchte man statt $[X,X]$ den Prozess X selber um seine Sprünge bereinigen, so kann es passieren, dass $\sum_{0<s\leq t}|\Delta X_s| = \infty$ und damit die Größe $\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s$ gar nicht definiert ist (in diesem Fall muss X von unendlicher Variation sein). Für Prozesse mit unendlicher Variation gibt es also i.A. keine Zerlegung in einen stetigen und einen Sprung-Anteil.*

[*] Mit den gleichen Argumenten kann man zu jedem nicht-fallenden Prozess durch

$$A_t^c := \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{A_t - \sum_{0\leq s<t,\ A_{s+}-A_{s-}>1/n}(A_{s+}-A_{s-})}_{\geq 0}\right) - (A_t - A_{t-})$$

mit $A_{0-} := A_0$ den stetigen Anteil definieren. Hierzu beachte man noch, dass die linken und rechten Limiten wegen Monotonie existieren. Beide Limiten können sich jedoch vom Wert des Prozesses unterscheiden.

Theorem 3.53 gilt sinngemäß auch für die quadratische Kovariation $[X, Y]$, d.h.

Theorem 3.57. *Seien X und Y Semimartingale. Der Prozess $[X, Y]$ erfüllt folgende Eigenschaften*

(i) $[X, Y]_0 = 0, \quad \Delta[X, Y] = \Delta X \Delta Y.$

(ii) Für eine Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zufälligen Partitionen, die gegen die Identität konvergiert, gilt

$$\sum_{i=1}^{k_n} (X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n})(Y^{T_i^n} - Y^{T_{i-1}^n}) \to [X, Y], \quad n \to \infty, \text{up.},$$

wobei σ_n durch $0 = T_0^n \le T_1^n \le \cdots \le T_{k_n}^n = T$ gegeben ist.

(iii) Wenn τ eine Stoppzeit ist, dann gilt

$$[X^\tau, Y] = [X, Y^\tau] = [X^\tau, Y^\tau] = [X, Y]^\tau.$$

Beweis. Geht analog zu Beweis Theorem 3.53 oder folgt aus Theorem 3.53 und der Polarisierungsidentität (3.41). Ad (iii): Es gilt

$$\begin{aligned}
[X^\tau, Y] &= X^\tau Y - X_0^\tau Y_0 - (X^\tau)_- \bullet Y - Y_- \bullet (X^\tau) \\
&= X^\tau Y^\tau - X_0 Y_0 - (X_- \bullet Y)^\tau - (Y_- \bullet X)^\tau + X^\tau (Y - Y^\tau) - X^\tau 1_{]\!]\tau,T]\!]} \bullet Y \\
&= (XY)^\tau - (X_0 Y_0)^\tau - (X_- \bullet Y)^\tau - (Y_- \bullet X)^\tau \\
&= [X, Y]^\tau
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.58. *Sei X ein stetiges lokales Martingal mit $[X, X]_T = 0$. Dann ist X konstant, d.h. $X_t = x_0 \ \forall t \in [0, T]$.*

Beweis. Übung (Tipp: benutze, dass der Prozess $X^2 - [X, X]$ ein lokales Martingal ist). □

Theorem 3.59. *Seien X und Y Semimartingale und H, $K \in \mathbb{L}$. Es gilt*

$$[H \bullet X, K \bullet Y] = (HK) \bullet [X, Y],$$

also insbesondere

$$[H \bullet X, H \bullet X] = H^2 \bullet [X, X].$$

Beweis. Es reicht aus, die Aussage

$$[H \bullet X, Y] = H \bullet [X, Y] \tag{3.45}$$

zu beweisen. Der Rest folgt aus der Symmetrie von $[\cdot,\cdot]$ und der Assoziativität des Integrals. Sei H zunächst von der Form $H = Z1_{\rrbracket T_1 T_2 \rrbracket}$, T_1, T_2 Stoppzeiten, Z $\mathcal{F}_{T_1}$-messbare Zufallsvariable. D.h., $H \bullet X = Z(X^{T_2} - X^{T_1})$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
[H \bullet X, Y] &= [Z(X^{T_2} - X^{T_1}), Y] \\
&= Z\{[X^{T_2}, Y] - [X^{T_1}, Y]\} \\
&= Z\{[X, Y]^{T_2} - [X, Y]^{T_1}\} \\
&= H \bullet [X, Y].
\end{aligned}$$

Aus der Linearität von $[\cdot,\cdot]$ und dem Integral folgt die Aussage für alle $H \in \mathcal{S}$.

Sei nun $H \in \overline{\mathcal{S}_{\text{up}}}$ mit approximierender Folge $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$, d.h. $H^n \to H$, $n \to \infty$, up. Für die rechte Seite von (3.45) gilt $H^n \bullet [X, Y] \overset{n\to\infty}{\to} H \bullet [X, Y]$, up, da $[X, Y]$ ein Semimartingal ist. Bleibt die entsprechende Aussage für die linke Seite von (3.45) zu zeigen. Aus der Definition der Kovariation folgt

$$\begin{aligned}
[H^n \bullet X, Y] &= (H^n \bullet X)Y - (H^n \bullet X)_- \bullet Y - Y_- \bullet (H^n \bullet X) \\
&= \underbrace{(H^n \bullet X)Y}_{\to (H\bullet X)Y} - \underbrace{(H^n \bullet X)_- \bullet Y}_{\to (H\bullet X)_-\bullet Y} - \underbrace{(Y_- H^n) \bullet X}_{\to (Y_- H)\bullet X = Y_-\bullet(H\bullet X)} \\
&\overset{\text{up}}{\to} [H \bullet X, Y], \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.60. *Sei M ein lokales Martingal mit deterministischem Startwert M_0. M ist genau dann ein Martingal mit $E(M_t^2) < \infty$ für alle $t \in [0, T]$, wenn $E([M, M]_T) < \infty$. In diesem Fall gilt*

$$\text{Varianz}(M_t) = E(M_t^2) - M_0^2 \;=\; E\left([M, M]_t\right), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.46}$$

D.h. bei Martingalen ist der Erwartungswert der quadratischen Variation (rechte Seite von 3.46) die Varianz.

Beweis. Nach Definition der quadratischen Variation gilt für alle t

$$M_t^2 = M_0^2 + 2M_- \bullet M_t + [M, M]_t. \tag{3.47}$$

Vom Prozess $M_- \bullet M$ wissen wir, dass er ein lokales Martingal ist. Würden wir den Unterschied zwischen lokalem und echtem Martingal einfach ignorieren, könnte man auf beiden Seiten von (3.47) den Erwartungswert bilden, was dann den Term $2M_- \bullet M_t$ zum Verschwinden bringen würde, und das Theorem wäre bereits bewiesen. Für den vollständigen Beweis gehen wir wie folgt vor. Sei o.B.d.A. $M_0 = 0$.

1. Schritt: Zuerst setzen wir voraus, dass M ein Martingal ist mit $E(M_t^2) < \infty$ für alle $t \in [0, T]$ (d.h. M ist ein quadratintegrierbares Martingal). Damit ist $M_- \bullet M$ mit Eigenschaft (e) des Integrals ein lokal quadratintegrierbares Martingal. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine

Lokalisierungsfolge, so dass $(M_- \bullet M)^{T_n}$ quadratintegrierbare Martingale sind. Aus (3.47) folgt somit wegen $E\left(M_- \bullet M_{t\wedge T_n}\right) = 0$, dass

$$E\left(M_{t\wedge T_n}^2\right) \quad = \quad E\left([M,M]_{t\wedge T_n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

Aus monotoner Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} E\left([M,M]_{t\wedge T_n}\right) = E\left(\lim_{n\to\infty} [M,M]_{t\wedge T_n}\right) = E\left([M,M]_t\right) \tag{3.49}$$

(man beachte, dass die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtfallend ist). Der Grenzübergang auf der linken Seite von (3.48) ist etwas schwieriger, da die Konvergenz nicht monoton ist. Aus der *Doobschen Ungleichung* für quadratintegrierbare Martingale folgt aber

$$E\left(\sup_{s\in[0,t]} M_s^2\right) \leq 4E(M_t^2) < \infty.$$

Damit ist $(M^2)_t^* := \sup_{0\leq s\leq t} M_s^2$ eine integrierbare Majorante und aus majorisierter Konvergenz folgt

$$E\left(M_{t\wedge T_n}^2\right) \to E(M_t^2), \quad n \to \infty. \tag{3.50}$$

(3.48), (3.49) und (3.50) zusammen ergeben

$$\infty > E(M_t^2) = E\left([M,M]_t\right), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.51}$$

2. Schritt: Setzen wir nun $E([M,M]_T) < \infty$ voraus. Wir wollen zunächst zeigen, dass M ein lokal quadratintegrierbares Martingal ist. Wähle dazu die Lokalisierungsfolge

$$T_n := \{t > 0 \mid |M_t| > n\} \wedge T.$$

Es gilt $\left(M^{T_n}\right)_T^* \leq n + |\Delta M_{T_n}| \leq n + \sqrt{[M,M]_T}$ und damit $\left(M^{T_n}\right)_T^* \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Folglich sind M^{T_n}, $n \in \mathbb{N}$, quadratintegrierbare Martingale (M^{T_n} ist als abgestopptes lokales Martingal wieder ein lokales Martingal mit der quadratintegrierbaren Zufallsvariable $\left(M^{T_n}\right)_T^*$, die den Prozess betragsmäßig dominiert). Nun können wir den 1. Schritt auf die abgestoppten Prozesse M^{T_n}, $n \in \mathbb{N}$, anwenden und mit (3.51) folgern

$$E(M_{t\wedge T_n}^2) \overset{\text{1. Schritt}}{=} E([M^{T_n}, M^{T_n}]_t) \overset{\text{Theorem 3.53(iii)}}{=} E([M,M]_{t\wedge T_n}). \tag{3.52}$$

Die rechte Seite konvergiert wieder wegen monotoner Konvergenz für $n \to \infty$ gegen $E([M,M]_t) < \infty$. Für die linke Seite gibt es die Majorante $(M^2)_t^*$. Sobald von $(M^2)_t^*$ Integrierbarkeit gezeigt ist, ist der Beweis fertig. Aus der *Doobschen Ungleichung* für die quadratintegrierbaren Martingale M^{T_n}, $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$E\left((M^2)_{t\wedge T_n}^*\right) \leq 4E\left(M_{t\wedge T_n}^2\right) \overset{(3.52)}{=} 4E\left([M,M]_{t\wedge T_n}\right) \leq 4E\left([M,M]_t\right) < \infty.$$

Damit folgt aus monotoner (!) Konvergenz für den bei $t\wedge T_n$ abgestoppten Supremumsprozess

$$E\left((M^2)_t^*\right) = \lim_{n\to\infty} E\left((M^2)_{t\wedge T_n}^*\right) \leq 4E\left([M,M]_t\right) < \infty.$$

$\square$

Bemerkung 3.61. *Der Beweis würde sich etwas verkürzen, wenn wir ganz zu Anfang benutzen würden, dass $M_- \bullet M$ als Integral nach einem lokalen Martingal ein lokales Martingal ist. Wir benutzen dagegen nur die leichter zu zeigende (und im Skript gezeigte) Aussage, dass Integrale nach lokal quadratintegrierbaren Martingalen lokal (quadratintegrierbare) Martingale sind.*

Korollar 3.62. *Sei B eine eindimensionale Standard-Brownsche-Bewegung und $H \in \mathbb{L}$ mit $E(\int_0^t H_s^2\, ds) < \infty$. Dann gilt $E(H \bullet B_t) = 0$ und*

$$E((H \bullet B_t)^2) \;=\; E\left(\int_0^t H_s^2\, ds\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Beweis. Da $H \bullet B$ ein lokales Martingal ist und $[H \bullet B, H \bullet B]_t = H^2 \bullet [B,B]_t = \int_0^t H_s^2\, ds$ folgt das Korollar direkt aus Theorem 3.60. □

Theorem 3.63. *Sei H ein càdlàg, adaptierter Prozess und seien X, Y Semimartingale. Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge zufälliger Partitionen, die gegen die Identität konvergiert. Dann konvergiert*

$$\sum_{i=1}^{k_n} H_{T_{i-1}^n}(X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n})(Y^{T_i^n} - Y^{T_{i-1}^n})$$

gegen $H_- \bullet [X,Y]$ "uniformly in probability" (up) für $n \to \infty$ (σ_n ist wieder durch $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n = T$ gegeben).

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} H_- \bullet [X,Y] &\overset{\text{Def. }[\cdot,\cdot]}{=} H_- \bullet (XY) - H_- \bullet (X_- \bullet Y) - H_- \bullet (Y_- \bullet X) \\ &\overset{\text{Assoz.}}{=} H_- \bullet (XY) - (HX)_- \bullet Y - (HY)_- \bullet X \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k_n} H_{T_{i-1}^n}(X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n})(Y^{T_i^n} - Y^{T_{i-1}^n}) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} H_{T_{i-1}^n}(X^{T_i^n}Y^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n}Y^{T_{i-1}^n}) - \sum_{i=1}^{k_n} H_{T_{i-1}^n}X_{T_{i-1}^n}(Y^{T_i^n} - Y^{T_{i-1}^n}) \\ &- \sum_{i=1}^{k_n} H_{T_{i-1}^n}Y_{T_{i-1}^n}(X^{T_i^n} - X^{T_{i-1}^n}) \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage mit Theorem 3.50 (unter Berücksichtigung von Korollar 3.55). □

3.3 Die Itô-Formel und einige Anwendungen

Theorem 3.64 (Itô-Formel). *Sei $X = (X^1, \dots, X^d)$ ein d-Tupel von Semimartingalen und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ besitze stetige zweite partielle Ableitungen. Dann ist der stochastische*

Prozess $f(X)$ wieder ein Semimartingal und es gilt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(X_-) \right) \bullet X_t^i \\ &+ \tfrac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\,(X_-) \right) \bullet [X^i, X^j]_t^c \\ &+ \sum_{0<s\le t} \{ f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(X_{s-}) \Delta X_s^i \} \end{aligned} \tag{3.53}$$

(wobei $[\cdot,\cdot]^c$ in (3.44) definiert wurde).

Bemerkung 3.65. *Die potentiell unendliche Summe in (3.53) (über alle Sprünge) ist absolut konvergent. Stoppe dazu den Prozess bei $R_k = \inf\{t \mid |X_t^i| \ge k$ für ein $i = 1, \ldots, d\}$ ab und entwickle die Funktion f um den Punkt $x = X_{s-}$. Wegen*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2), \quad h \to 0, \ \textit{gleichmäßig in } x \textit{ mit } ||x|| \le k$$

und $\sum_{0<s\le t} (\Delta X_s)^2 < \infty$, P-f.s. (vgl. Bemerkung 3.56) ist die Summe $\sum_{0<s\le R_k} \{f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(X_{s-}) \Delta X_s^i\}$ absolut konvergent. Da $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lokalisierend ist, muss auch $\sum_{0<s\le t} \ldots$ absolut konvergent sein. Als Prozess betrachtet ist der Ausdruck von endlicher Variation.

Für $d = 1$ und einen reellwertigen càdlàg Prozess A von endlicher Variation reduziert sich die Itô-Formel zu

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s)\, dA_s^c + \sum_{0<s\le t} (f(A_s) - f(A_{s-}))\,.$$

Hierbei bezeichne A^c den stetigen Anteil des Prozesses A, der wegen der endlichen Variation von A analog zu (3.44) gewonnen werden kann. Man beachte, dass $\int_0^t f'(A_{s-})\, dA_s^c = \int_0^t f'(A_s)\, dA_s^c$, da eine Modifikation des Integranden an abzählbar vielen Punkten bei einem stetigen Integrator das Integral nicht verändert.

Die Itô-Formel ist also eine **Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung**, wonach das Integral über die Ableitung einer Funktion die Funktion selber (minus ihren Startwert) ergibt.

Bemerkung 3.66. *In Anwendungen ist eines der Semimartingale oft die Zeit, also etwa $X_t^1 = t$. Es gilt dann $[X^1, X^j] = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, d$ (wegen $[X^1, X^1] = 0$ und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung) und $\Delta X^1 = 0$. Also z.B.*

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_1 f(s, B_s)\, ds + \int_0^t \partial_2 f(s, B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{22} f(s, B_s)\, ds$$

für eine Standard Brownsche Bewegung B.

Korollar 3.67. *Sei X ein stetiges Semimartingal und $f \in C^2(\mathbb{R})$. Dann ist $f(X)$ wieder ein Semimartingal und es gilt*

$$f(X_t) - f(X_0) = f'(X) \bullet X_t + \tfrac{1}{2} f''(X) \bullet [X,X]_t. \tag{3.54}$$

Beweis des Satzes für X stetig. Wir setzen aus Bequemlichkeit und o.B.d.A. $d = 1$.

1.) Definiere $R_k := \inf\{t \mid |X_t| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Wegen Stetigkeit ist der gestoppte Prozess $|1_{\{R_k>0\}} X^{R_k}|$ durch k beschränkt. Wenn die Itô-Formel für alle gestoppten Prozesse $1_{\{R_k>0\}} X^{R_k}$ gilt, so gilt sie auch für X selber. Also kann X o.B.d.A. als beschränkt angenommen werden. Der Fall, dass X_0 eine unbeschränkte Zufallsvariable ist, ist offenbar abgedeckt, da $|X_0(\omega)| > k$ impliziert, dass $R_k(\omega) = 0$.

2.) Sei $t \in (0,T]$. Es gilt[†]:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^{n} \{f(X_{\frac{i}{n}t}) - f(X_{\frac{i-1}{n}t})\} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor-Entwicklung}}}{=} \sum_{i=1}^{n} f'(X_{\frac{i-1}{n}t})(X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t}) + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(X_{\frac{i-1}{n}t})(X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} R(X_{\frac{i-1}{n}t}, X_{\frac{i}{n}t}), \end{aligned} \tag{3.55}$$

wobei für den "Fehler" $R : [-k,k] \times [-k,k] \to \mathbb{R}$ gilt

$$|R(x,y)| \leq \frac{1}{2}(x-y)^2 r(|x-y|) \text{ mit } r(z) := \sup_{-k \leq z_1, z_2 \leq k,\ |z_2 - z_1| \leq z} |f''(z_2) - f''(z_1)|, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Theorem 3.50 konvergiert die erste Summe in (3.55) für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $f'(X) \bullet X_t$, während nach Theorem 3.63 die zweite Summe in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{2} f''(X) \bullet [X,X]_t$ konvergiert.

Bleibt der "Rest" $\sum_{i=1}^{n} R(X_{\frac{i-1}{n}t}, X_{\frac{i}{n}t})$ zu betrachten. Dieser ist aber betragsmäßig beschränkt durch

$$\frac{1}{2} r\left(\max_{i=1,\dots,n} |X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t}|\right) \sum_{i=1}^{n} (X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t})^2. \tag{3.56}$$

[†]Lagrangesche Form des Restglieds besagt: Wenn $f \in C^2(\mathbb{R})$, dann existiert zu allen $x, y \in \mathbb{R}$ ein $\xi \in [x,y]$ bzw. $\xi \in [y,x]$, so dass $f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(y-x)^2$ (folgt aus der Taylorschen Formel, die das exakte Restglied $\int_x^y (y-t) f''(t)\, dt$ liefert und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung). Damit gilt für den Fehler R in (3.55)

$$R(x,y) = \frac{1}{2}(f''(\xi) - f''(x))(y-x)^2.$$

Wegen der Stetigkeit von f'' (und damit gleichmäßigen Stetigkeit von $f''|_{[-k,k]}$) gilt $r(z) \to 0$ für $z \to 0$ und damit

$$r(\max_{i=1,\ldots,n} |X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t}|) \to 0 \ P\text{-f.s. für } n \to \infty.$$

Da nach Theorem 3.53 die Summe $\sum_{i=1}^n \left(X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t}\right)^2$ in Wahrscheinlichkeit gegen $[X,X]_t$ konvergiert und $[X,X]_t < \infty$ P-f.s., folgt, dass (3.56) in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert

$$\Rightarrow f(X_t) - f(X_0) = f'(X_-) \bullet X_t + \frac{1}{2} f''(X_-) \bullet [X,X]_t.$$

Wegen der Stetigkeit der Prozesse auf beiden Seiten von (3.54) folgt Ununterscheidbarkeit und damit die Behauptung. □

Bemerkung 3.68. *Wenn X zusätzlich von endlicher Variation wäre, hätte man in der obigen Taylor-Entwicklung bereits nach dem Glied 1. Ordnung (mit f') abbrechen können mit der Fehlerabschätzung*

$$|\widetilde{R}(x,y)| \le |x-y| \widetilde{r}(|x-y|) \ \textit{mit} \ \widetilde{r}(z) := \sup_{-k \le z_1, z_2 \le k, \ |z_2 - z_1| \le z} |f'(z_2) - f'(z_1)|, \quad z \in \mathbb{R}_+.$$

Wenn X allerdings von unendlicher Variation ist, reicht die Abschätzung, die man für $\sum_{i=1}^n \widetilde{R}(X_{\frac{i-1}{n}t}, X_{\frac{i}{n}t})$ erhalten würde, nicht mehr aus.

Theorem 3.69. *[Stochastisches Exponential] Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Es existiert genau ein Semimartingal Z, das folgende Gleichung erfüllt:*

$$Z_t = 1 + Z_- \bullet X_t, \quad \forall t \ge 0. \tag{3.57}$$

Der stochastische Prozess Z ist gegeben durch

$$Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t^c) \prod_{0<s\le t} \left((1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s)\right), \tag{3.58}$$

wobei das (möglicherweise) unendliche Produkt über alle Sprünge "absolut multiplizierbar" ist.

Sucht man bei Google nach "absolut multiplizierbar", so findet man keinen seriösen Eintrag. Gemeint ist damit natürlich, dass die Reihenfolge, mit der man das Produkt bildet, keine Rolle spielt. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ ist genau dann absolut multiplizierbar mit positivem Grenzwert, wenn $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist.

Wenn $\Delta X > -1$, folgt bei der logarithmierten Summe in (3.58) diese Eigenschaft aus der absoluten Summierbarkeit der quadrierten Sprünge von X und der Tatsache, dass

$$\ln[(1+x)\exp(-x)] = \ln(1+x) - x = O(x^2), \quad x \to 0.$$

Man beachte, dass es im allgemeinen Fall höchstens endlich viele Sprünge kleiner/gleich -1 gibt, also höchstens endlich viele nicht-positive Faktoren in (3.58). Das Produkt in (3.58) kann also nur Null werden, wenn ein Sprung der Höhe -1 auftritt.

Definition 3.70. *Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Die eindeutige Lösung der Integralgleichung (3.57) wird das* **stochastische Exponential** *von X genannt (oder auch das Doléans-Dade Exponential von X). Man schreibt $\mathcal{E}(X) := Z$, d.h.*

$$\mathcal{E}(X)_t = 1 + \mathcal{E}(X)_- \bullet X_t.$$

Beispiel 3.71. *[Geometrische Brownsche Bewegung] Sei $X_t = \sigma B_t$, $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ und B eine Standard-Brownsche Bewegung. Nach Theorem 3.69 gilt:*

$$\mathcal{E}(\sigma B)_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}[\sigma B, \sigma B]_t\right) = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}\, t\right).$$

$\mathcal{E}(X)$ unterscheidet sich also i.A. vom **gewöhnlichen Exponential** $\exp(X)$. Der Unterschied ist jedoch erst bei Sprüngen gravierend: ΔX_t geht in $\mathcal{E}(X)_t$ nur affin-linear, aber in $\exp(X_t)$ exponentiell ein.

Bemerkung 3.72. *1) Die Lösung von* (3.57) *ist genau dann mit Wahrscheinlichkeit* 1 *positiv, wenn $\Delta X > -1$.*

2.) Wenn X ein lokales Martingal ist, dann ist auch $\mathcal{E}(X)$ ein lokales Martingal (folgt aus der lokalen Beschränkheit von $\mathcal{E}(X)_-$ und Bemerkung 3.48)

3) Wenn X ein Lévy-Prozess ist (Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen), also z.B. eine Brownsche Bewegung, dann gilt auch die Implikation: X Martingal $\Rightarrow$ $\mathcal{E}(X)$ Martingal.

Bemerkung 3.73. (3.57) *ist ein Beispiel für eine sog.* **stochastische Differentialgleichung (SDE, "stochastic differential equation")***. Der Begriff "Differentialgleichung" rührt daher, dass man für* (3.57) *meist "abkürzend" schreibt "$dZ_t = Z_{t-}dX_t$ und $Z_0 = 1$." Gemeint ist aber auch bei der differentiellen Schreibweise, dass Z die* Integralgleichung (3.57) *erfüllt, d.h. dX_t ist keine eigenständige Größe.*

Beweis der Existenz in Theorem 3.69. Setze

$$Z_t := \exp(Y_t)J_t \text{ mit } Y_t := X_t - \tfrac{1}{2}[X,X]^c_t,\ J_t := \textstyle\prod_{0<s\leq t}\left((1+\Delta X_s)\exp(-\Delta X_s)\right).$$

Z ist offenbar der Prozess in (3.58). Mit der Itô-Formel angewandt auf $f(y,j) := \exp(y)j$ und die Semimartingale Y und J folgt:

$$\begin{aligned}
&\exp(Y_t)J_t \qquad (3.59)\\
&= 1 + (\exp(Y_-)J_-) \bullet Y_t + \exp(Y_-) \bullet J_t + \tfrac{1}{2}\left(\exp(Y_-)J_-\right) \bullet [Y,Y]^c_t\\
&\quad + \sum_{0<s\leq t}\left(\Delta(\exp(Y_s)J_s) - \exp(Y_{s-})J_{s-}\Delta Y_s - \exp(Y_{s-})\Delta J_s\right)\\
&= 1 + (\exp(Y_-)J_-) \bullet X_t - \tfrac{1}{2}\left(\exp(Y_-)J_-\right) \bullet [X,X]^c_t + \tfrac{1}{2}\exp(Y_-) \bullet [Y,Y]^c_t\\
&= 1 + (\exp(Y_-)J_-) \bullet X_t,
\end{aligned}$$

also $Z_t = 1 + Z_- \bullet X_t$. In die zweite Gleichtung geht ein: $\Delta Y_s = \Delta X_s$ und $\Delta(\exp(Y_s)J_s) = \exp(Y_{s-})J_{s-}\Delta X_s$. In die letzte Gleichung geht ein: $[Y,Y]^c = [X,X]^c$. □

Eine weitere wichtige Anwendung der Itô-Formel ist das folgende Theorem.

Theorem 3.74 (Lévys Theorem)**.** *Ein stochastischer Prozess X ist genau dann eine Standard-Brownsche-Bewegung, wenn er ein lokales Martingal ist, das in Null startet und $[X,X]_t = t$, $\forall t \geq 0$.*

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass die Standard-Brownsche-Bewegung ein Martingal ist und ihre quadratische Variation die Identität ist. Zu zeigen bleibt die Umkehrung. Sei X also ein lokales Martingal mit $[X,X]_t = t$, $\forall t \geq 0$. Wegen $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$ folgt, dass X stetig sein muss. Für festes $u \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t) := \exp\left(iux + \frac{u^2}{2}t\right), \quad \text{wobei } i = \sqrt{-1}$$

und wenden auf den komplexwertigen Prozess $Z_t := f(X_t, t)$ die Itô-Formel an[‡]:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + \int_0^t \partial_1 f(X_s,s)\,dX_s + \int_0^t \partial_2 f(X_s,s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{11} f(X_s,s)\,d[X,X]_s \\ &= 1 + iu\int_0^t f(X_s,s)\,dX_s + \frac{u^2}{2}\int_0^t f(X_s,s)\,ds + \frac{i^2u^2}{2}\int_0^t f(X_s,s)\,d[X,X]_s \\ &= 1 + iu\int_0^t f(X_s,s)\,dX_s, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Mit Theorem 3.60 ist X ein quadratintegrierbares Martingal. Aus der Beschränktheit des Integranden Z auf kompakten Zeitintervallen (man beachte, dass X reellwertig ist und damit sowohl $\mathrm{Re}(Z)$ als auch $\mathrm{Im}(Z)$ beschränkt sind) folgt mit Eigenschaft (d) des Integrals, dass Z (bzw. $\mathrm{Re}(Z)$ und $\mathrm{Im}(Z)$) ein (quadratintegrierbares) Martingal ist und damit

$$E\left(\exp\left(iuX_t + \frac{u^2}{2}t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left(iuX_s + \frac{u^2}{2}s\right), \quad \forall s \leq t < \infty.$$

Multiplikation beider Seiten mit der komplexwertigen $\mathcal{F}_s$-messbaren Zufallsvariablen $\exp\left(-iuX_s - \frac{u^2}{2}t\right)$ ergibt[§]

$$E\left(\exp(iu(X_t - X_s)) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}(t-s)\right), \quad \forall s \leq t < \infty. \tag{3.60}$$

[‡]Formal wendet man Theorem 3.64 (getrennt) auf die reellwertigen Funktionen $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ an. Also auf $(x,t) \mapsto \mathrm{Re}(f(x,t)) = \cos(ux)\exp\left(\frac{u^2}{2}t\right)$ und $(x,t) \mapsto \mathrm{Im}(f(x,t)) = \sin(ux)\exp\left(\frac{u^2}{2}t\right)$. $\partial_1 f(\ldots)$, etc., kann man dann mit dem Vektor $(\partial_1\mathrm{Re}(f(\ldots)), (\partial_1\mathrm{Im}(f(\ldots)))$ identifizieren. Wegen $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$, gilt $\partial_1\mathrm{Re}(f(\ldots)) = -u\mathrm{Im}(f(\ldots))$, $\partial_1\mathrm{Im}(f(\ldots)) = u\mathrm{Re}(f(\ldots))$, $\partial_{11}\mathrm{Re}(f(\ldots)) = -u^2\mathrm{Re}(f(\ldots))$ und $\partial_{11}\mathrm{Im}(f(\ldots)) = -u^2\mathrm{Im}(f(\ldots))$. Zudem gilt $\partial_2\mathrm{Re}(f(\ldots)) = (u^2/2)\mathrm{Re}(f(\ldots))$ und $\partial_2\mathrm{Im}(f(\ldots)) = (u^2/2)\mathrm{Im}(f(\ldots))$. Man beachte dabei, dass X_t und t reellwertig sind.

[§]Mit der Definition der Multiplikation komplexer Zahlen und den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus gilt $\exp(iuX_t) \cdot \exp(-iuX_s) = (\cos(uX_t), \sin(uX_t)) \cdot (\cos(-uX_s), \sin(-uX_s)) = (\cos(uX_t)\cos(-uX_s) - \sin(uX_t)\sin(-uX_s), \cos(uX_t)\sin(-uX_s) + \sin(uX_t)\cos(-uX_s)) = (\cos(u(X_t - X_s)), \sin(u(X_t - X_s))) = \exp(iu(X_t - X_s))$.

Sei Y eine $\mathcal{F}_s$-messbare Zufallsvariable. Für die charakteristische Funktion des Vektors $(X_t - X_s, Y)$ gilt

$$\begin{aligned}
E\left(\exp(iu(X_t - X_s) + ivY)\right) &= E\left(E\left(\exp(iu(X_t - X_s) + ivY) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&= E\left(\exp(ivY) E\left(\exp(iu(X_t - X_s)) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&= E\left(\exp(ivY) \exp\left(-\frac{u^2}{2}(t-s)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{u^2}{2}(t-s)\right) E\left(\exp(ivY)\right), \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Da $u \mapsto \exp\left(-\frac{u^2}{2}(t-s)\right)$ die charakteristische Funktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $t-s$ ist, folgt aus (3.61), dass $X_t - X_s$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t-s$ ist und aus der Produktdarstellung der charakteristischen Funktion des Vektors $(X_t - X_s, Y)$ folgt die stochastische Unabhängigkeit von $X_t - X_s$ und Y. Da Y eine beliebige $\mathcal{F}_s$-messbare Zufallsvariable war, folgt die stochastische Unabhängigkeit von $X_t - X_s$ und der σ-Algebra $\mathcal{F}_s$. □

3.4 Maßwechsel

Bisher gab es nur ein einziges Wahrscheinlichkeitsmaß P (d.h. die Gewichtung der möglichen Ereignisse war fest vorgegeben). In Anwendungen ist es oft wichtig, sich einen stochastischen Prozess unter verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen anzuschauen. So muss in der Statistik das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsmaß erst geschätzt werden (d.h. aus einer Menge potentieller Maße muss eines ausgewählt werden, das besonders gut zu den beobachteten Daten passt). In der Finanzmathematik geht man oft zu einem neuen **künstlichen Wahrscheinlichkeitsmaß** über, unter dem sich gewisse Größen einfacher berechnen lassen.

Sei X ein Semimartingal auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ mit Darstellung

$$X = X_0 + M + A, \tag{3.62}$$

d.h. M ist ein P-lokales Martingal und A ist ein adaptierter Prozess, dessen Pfade càdlàg und von endlicher Variation sind mit $M_0 = A_0 = 0$[¶]. Wir wollen uns den stochastischen Prozess X "unter einem neuen Maß Q anschauen". Q soll **äquivalent** zu P sein, $Q \sim P$, d.h. $\forall B \in \mathcal{F}$ gilt $Q(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = 0$. Der Prozess X selber – als Abbildung von $\Omega \times [0,T]$ nach $\mathbb{R}^d$ – ändert sich dabei nicht. Nur die Wahrscheinlichkeit, dass der realisierte Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$ gewisse Werte annimmt, kann sich unter dem neuen Maß ändern. Die Nullmengen sollen aber invariant unter dem Maßwechsel bleiben.

[¶]Wenn der endliche Variationsprozess A vorhersehbar ist, dann wird er als *die* Drift von X unter P bezeichnet. Man kann zeigen, dass es unter der Nebenbedingung, dass A vorhersehbar sein muss, keine zwei verschiedene Zerlegungen von X geben kann (allerdings besitzt nicht jedes Semimartingal eine Zerlegung mit vorhersehbarem A). Im Allgemeinen ist die Zerlegung (3.62) jedoch nicht eindeutig, was man sich am kompensierten Poisson-Prozess klarmachen kann.

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie eine Zerlegung

$$X = X_0 + M^Q + A^Q$$

unter Q aussehen könnte (d.h. M^Q ist ein Q-lokales Martingal und A^Q ist wieder ein Prozess von endlicher Variation).

Oft soll das neue Maß Q so gewählt werden, dass die Drift unter Q verschwindet, d.h. $A^Q = 0$, bzw. X ist ein Q-lokales Martingal.

Bemerkung 3.75. *Die Forderung, dass Q dieselben Nullmengen wie P haben soll, bedeutet anschaulich, dass ein Ereignis unter Q genau dann unmöglich ist, wenn es auch unter P unmöglich ist. In zeitstetigen Modellen ist diese Forderung restriktiver als man vielleicht vermuten würde. Wenn X unter P z.B. eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ ist, also $[X,X]_t = \sigma^2 t$, dann gibt es kein äquivalentes Maß Q unter dem X eine Brownsche Bewegung mit einer anderen Volatilität $\widetilde{\sigma} \neq \sigma$ ist. Dies folgt sofort aus $P([X,X]_t = \sigma^2 t) = 1 = Q([X,X]_t = \sigma^2 t)$.*

Wenn X und Y unter P zwei unabhängige Brownsche Bewegungen sind, wenn also für den Kovariationsprozess gilt $P([X,Y]_t = 0) = 1$ gilt, dann können X und Y unter einem äquivalenten Maß nicht zu positiv oder negativ korrelierten Brownschen Bewegungen werden (unter einem Maßwechsel können X und Y stochastische Drifts bekommen, die dann auch abhängig sein können, aber die kurzfristig dominierenden dB_t-Terme bleiben unabhängig). Dieses Verhalten besitzt offenbar keine Entsprechung in zeitdiskreten Modellen.

Definition 3.76. *Sei $Q \sim P$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Die durch die Bedingung*

$$Q(B) = E_P\left(1_B \frac{dQ}{dP}\right) \quad \forall B \in \mathcal{F} \tag{3.63}$$

P-f.s. eindeutig bestimmte Zufallsvariable $\frac{dQ}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wird **Radon-Nikodym-Ableitung** *von Q nach P genannt. Unter dem* **Dichteprozess** *von Q versteht man die càdlàg Version von*

$$t \mapsto Z_t = E_P\left(\tfrac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Proposition 3.77. *Z ist ein (strikt) positives P-Martingal mit $E_P(Z_t) = 1$ für alle $t \in [0,T]$ und $Z_T = \frac{dQ}{dP}$.*

Beweis. Die Aussage zum Erwartungswert folgt mit der Wahl von $B = \Omega$ in (3.63). Aus der $\mathcal{F}_T$-Messbarkeit von $\frac{dQ}{dP}$ folgt $Z_T = \frac{dQ}{dP}$. Für die Menge $\left\{\frac{dQ}{dP} \leq 0\right\} \in \mathcal{F}$ gilt

$$Q\left(\left\{\frac{dQ}{dP} \leq 0\right\}\right) = E_P\left(1_{\left\{\frac{dQ}{dP} \leq 0\right\}} \frac{dQ}{dP}\right) \leq 0$$

und damit $Q(dQ/dP \leq 0) = 0$, da Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Mit $Q \sim P$ folgt

$$\frac{dQ}{dP} > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Man beachte zudem, dass für ein Martingal M die Implikation

$$P(M_T > 0) = 1 \implies P(M_t > 0) = 1, \quad \forall t \in [0, T]$$

gilt. $\square$

Proposition 3.78. *Die Zufallsvariable Z_t ist die Radon-Nikodym-Ableitung des auf $\mathcal{F}_t$ eingeschränkten Maßes Q bzgl. des auf $\mathcal{F}_t$ eingeschränkten Maßes P, d.h.*

$$\frac{d(Q\mid_{\mathcal{F}_t})}{d(P\mid_{\mathcal{F}_t})} = Z_t.$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}_t$. Es gilt $Q(A) = E_P(1_A \frac{dQ}{dP}) = E_P(1_A E_P(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t))$. Da Z_t zudem $\mathcal{F}_t$-messbar ist, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.79. *In allen Anwendungen ist $\mathcal{F}_0$ die sog. P-triviale σ-Algebra also*

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} \mid P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}. \tag{3.64}$$

In diesem Fall gilt $Z_0 = 1$ P-f.s. Da dies jedoch für die folgenden Überlegungen nicht gebraucht wird und Mathematiker ungern überflüssige Voraussetzungen machen, schließen wir andere $\mathcal{F}_0$ nicht aus.

Proposition 3.80. *Für jede nichtnegative Zufallsvariable H gilt*

$$E_Q(H) = E_P(HZ_T) \tag{3.65}$$

(wobei der Fall $\infty = \infty$ nicht ausgeschlossen ist) und für jede Zufallsvariable H gilt $H \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q) \Leftrightarrow HZ_T \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Beweis. Man zeige (3.65) zunächst für Elementarfunktionen $H = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt nämlich

$$\begin{aligned} E_Q\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}\right) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k E_P\left(1_{A_k} Z_T\right) \\ &= E_P\left(\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}\right) Z_T\right). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Nun approximiert man ein beliebiges $H \geq 0$ durch elementare H^n, wobei

$$H^n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{\{(k-1)2^{-n} \leq H < k2^{-n}\}}.$$

H^n steigt für $n \to \infty$ punktweise gegen H auf (und damit auch $H^n Z_T$ gegen HZ_T). Es folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und (3.66)

$$E_Q(H) = \lim_{n\to\infty} E_Q(H^n) = \lim_{n\to\infty} E_P(H^n Z_T) = E_P(HZ_T).$$

$\square$

Theorem 3.81 (Bayes Formel). *Für jede Zufallsvariable H mit $E_Q(|H|) < \infty$ gilt*

$$E_Q(H \mid \mathcal{F}_t) = \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}, \quad t \in [0, T].$$

Beweis. Die Zufallsvariable $\frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar. Des weiteren gilt für alle $A \in \mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
E_Q\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}\right) &= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_T\right) \\
&= E_P\left(E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_T \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\
&= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} E_P\left(Z_T \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\
&= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_t\right) \\
&= E_P\left(E_P(1_A HZ_T \mid \mathcal{F}_t)\right) \\
&= E_P\left(1_A HZ_T\right) \\
&= E_Q\left(1_A H\right).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt die Zufallsvariable $\frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}$ die Bedingungen, die den bedingten Erwartungswert von H unter der Information $\mathcal{F}_t$ bzgl. des Maßes Q charakterisieren. □

Proposition 3.82. *Sei $Q \sim P$ und $Z_t = E_P(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t)$ der zugehörige Dichteprozess. Ein adaptierter càdlàg-Prozess M ist genau dann ein Q-(lokales) Martingal, wenn der Prozess MZ ein P-(lokales) Martingal ist.*

Der Beweis stimmt in weiten Teilen mit dem Beweis in diskreter Zeit überein (siehe dortiges Skript). Nur die Aussage mit ,,lokal" ließ sich in diskreter Zeit etwas vereinfachen.

Beweis. Schritt 1: Aus den Propositionen 3.78 und 3.80 folgt

$$E_Q(|M_t|) = E_P(|M_t| Z_t) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Damit sind die benötigten Integrierbarkeiten äquivalent. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
M\ Q\text{-Martingal} \quad &\Leftrightarrow \quad E_Q(1_B(M_t - M_s)) = 0, \quad \forall s \leq t,\ B \in \mathcal{F}_s \\
&\Leftrightarrow \quad E_P(1_B(M_t - M_s)Z_T) = 0, \quad \forall s \leq t,\ B \in \mathcal{F}_s \\
{\scriptsize \begin{array}{l} E[1_B M_s Z_T] \\ = E[1_B M_s E(Z_T \mid \mathcal{F}_s)] \\ = E[1_B M_s Z_s] \end{array}} \rightarrow \quad &\Leftrightarrow \quad E_P(1_B(M_t Z_t - M_s Z_s)) = 0, \quad \forall s \leq t,\ B \in \mathcal{F}_s \\
&\Leftrightarrow \quad MZ \text{ ist } P\text{- Martingal}
\end{aligned}$$

Schritt 2: Bleibt die entsprechende Äquivalenz für lokale Martingale zu zeigen. Da P und Q die gleichen Nullmengen haben, ändert sich die Menge der lokalisierenden Folgen von Stoppzeiten nicht und es gilt

$$\begin{array}{lcl} M \text{ ist } Q\text{-lokales Martingal} & \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} & \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{\in\mathbb{N}} \text{ mit } M^{T_n} \text{ ist } Q\text{-Mart.} \\ & \overset{\text{Schritt 1}}{\Leftrightarrow} & \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{\in\mathbb{N}} \text{ mit } M^{T_n}Z \text{ ist } P\text{-Mart.} \\ & \overset{???}{\Leftrightarrow} & \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{\in\mathbb{N}} \text{ mit } (MZ)^{T_n} \text{ ist } P\text{-Mart.} \\ & \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} & MZ \text{ ist } P\text{-lokales Martingal} \end{array}$$

Da $(M^{T_n}Z)^{T_n} = M^{T_n}Z^{T_n} = (MZ)^{T_n}$ und abgestoppte Martingale wieder Martingale sind, ist die Richtung $\overset{???}{\Rightarrow}$ klar. Für die Umkehrung bleibt noch zu zeigen, dass der Differenzprozess

$$M^{T_n}\left(Z - Z^{T_n}\right)$$

ein P-Martingal ist.

Zunächst zeigen wir die Integrierbarkeit der Zufallsvariablen $M_t^{T_n}\left(Z_t - Z_t^{T_n}\right)$, $t \in [0,T]$. Dafür reicht es, die Integrierbarkeit von $M_t^{T_n}Z_t$ für alle $t \in [0,T]$ zu zeigen (da $M^{T_n}Z^{T_n}$ ein Martingal ist). Diese folgt aus[‖]

$$\begin{aligned} E_P(|M_{T_n\wedge t}Z_t|) &= E_P(|M_{T_n\wedge t}|Z_t) \\ &= E_P\left(E_P(|M_{T_n\wedge t}|Z_t \mid \mathcal{F}_{T_n\wedge t})\right) \\ &= E_P\left(|M_{T_n\wedge t}|E_P(Z_t \mid \mathcal{F}_{T_n\wedge t})\right) \\ &= E_P\left(|M_{T_n\wedge t}|Z_{T_n\wedge t}\right) < \infty. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Der Erwartungswert in der letzten Zeile ist endlich, da $M^{T_n}Z^{T_n}$ ein P-Martingal ist. Man beachte, dass die Nicht-Negativität des Dichteprozesses benutzt werden muss.

Da die Integrierbarkeit von $M_t^{T_n}\left(Z_t - Z_t^{T_n}\right)$ nun gesichert ist, lässt sich unbeschwert rechnen

$$\begin{aligned} & E_P\left(M_T^{T_n}(Z_T - Z_T^{T_n}) \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= E_P\left(M_{T_n}(Z_T - Z_{T_n\vee t}) \mid \mathcal{F}_t\right) + E_P\left(M_{T_n}(Z_{T_n\vee t} - Z_{T_n}) \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= E_P\left(M_{T_n}\underbrace{E_P(Z_T - Z_{T_n\vee t} \mid \mathcal{F}_{T_n\vee t})}_{=0} \mid \mathcal{F}_t\right) + M_{T_n}1_{\{T_n<t\}}(Z_t - Z_{T_n}) \\ &= M_t^{T_n}(Z_t - Z_t^{T_n}), \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Folglich ist der Prozess $M^{T_n}\left(Z - Z^{T_n}\right)$ ein Martingal. $\square$

[‖]Seien Y_1, Y_2 nichtnegative Zufallsvariablen (nicht notwendigerweise integrierbar) mit Y_1 $\mathcal{G}_1$-messbar. Für nichtnegative Zufallsvariablen ist der bedingte Erwartungswert stets erklärt (mit $E(Y_2 \mid \mathcal{G}_1) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(Y_2 \wedge n \mid \mathcal{G}_1)$) und es gilt

$$E(Y_1Y_2) = E(Y_1E(Y_2 \mid \mathcal{G})). \tag{3.67}$$

(3.67) kann man auf den bekannten Fall mit integrierbaren Zufallsvariablen zurückführen, indem man zuerst $Y_1 \wedge n$ und $Y_2 \wedge n$ betrachtet und dann monotone Konvergenz anwendet.

Proposition 3.83. *Sei $Q \sim P$. Für die Radon-Nikodym-Ableitung dQ/dP gilt dann $dQ/dP > 0$ P-f.s. und*

$$\frac{1}{\frac{dQ}{dP}}$$

ist die Radon-Nikodym-Ableitung von P bzgl. Q, d.h.

$$P(B) = E_Q\left(1_B \frac{1}{\frac{dQ}{dP}}\right) \quad \forall B \in \mathcal{F},$$

also

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}}.$$

Beweis. Wegen $Q \sim P$ gilt $P(dQ/dP > 0) = 1$ und $Q(dQ/dP > 0) = 1$. Wählt man speziell $H := \frac{1_B}{dQ/dP}$ für ein Ereignis B, so folgt aus Proposition 3.80

$$E_Q\left(\frac{1_B}{\frac{dQ}{dP}}\right) = E_P\left(\frac{1_B}{\frac{dQ}{dP}}\frac{dQ}{dP}\right) = P(B).$$

□

Proposition 3.84. *Sei $Q \sim P$ und $Z_t = E_P(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t)$ der zugehörige Dichteprozess. Dann ist der Prozess $\frac{1}{Z}$ der Dichteprozess von P bzgl. Q, d.h.*

$$\frac{1}{Z_t} = E_Q\left(\frac{dP}{dQ} \mid \mathcal{F}_t\right), \quad t \in [0,T]. \tag{3.69}$$

Beweis. Nach Proposition 3.83 ist $\frac{1}{Z_T}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von P bzgl. Q. Also stimmt die Gleichung (3.69) schonmal für $t = T$. Wegen Proposition 3.82 ist der Prozess $\frac{1}{Z}$ ein Q-Martingal. Da der Prozess $t \mapsto E_Q\left(\frac{dP}{dQ} \mid \mathcal{F}_t\right)$ auch ein Q-Martingal ist und Martingale durch ihre Endwerte eindeutig bestimmt sind, muss die Gleichung (3.69) für alle $t \in [0,T]$ gelten. □

Theorem 3.85 (Girsanov-Meyer-Theorem)**.** *Seien $Q \sim P$, Z der Dichteprozess von Q bzgl. P und X ein Semimartingal mit einer Zerlegung $X = X_0 + M + A$, wobei M ein P-lokales Martingal und A ein Prozess von endlicher Variation ist. Dann existiert unter Q die folgende Zerlegung*

$$\begin{aligned} M_t^Q &:= M_t - \tfrac{1}{Z} \bullet [Z,M]_t \\ \textit{und } A_t^Q &:= A_t + \tfrac{1}{Z} \bullet [Z,M]_t, \end{aligned}$$

d.h. $X = M^Q + A^Q$, wobei M^Q ein Q-lokales Martingal und A^Q ein Prozess von endlicher Variation ist.

Bemerkung 3.86. *1.) Der Integrand $\frac{1}{Z}$ ist i.A. nicht linksstetig. Das Integral $\frac{1}{Z} \bullet [Z, M]_t$ existiert jedoch pfadweise als Lebesgue-Stieltjes-Integral, da der Integrator $[Z, M]$ endliche Variation besitzt. Beachte dazu, dass $P(\inf_{0 \le u \le T} Z_u > 0) = 1$ (da Z Martingal mit positivem Endwert, Implikation ist Übungsaufgabe). Zudem kann gezeigt werden, dass der Prozess $t \mapsto \frac{1}{Z} \bullet [Z, M]_t$ adaptiert und càdlàg ist.*

Alternativ könnte man (ohne Bezugnahme auf das Lebesgue-Stieltjes Integral) für H adaptiert, càdlàg und Y adaptiert, càdlàg, endliche Variation das Integral durch

$$H \bullet Y := H_- \bullet Y + \sum_{0<s\le \cdot} \Delta H_s \Delta Y_s$$

formal einführen. $H \bullet Y$ ist dann offenbar ein Semimartingal mit $\Delta(H \bullet Y) = H\Delta Y$.

2.) Man beachte, dass die Zerlegungen im Theorem nicht eindeutig sind!

3.) Anschaulich: Wenn $[Z, M]$ ein wachsender Prozess ist, werden den Aufwärtsbewegungen von M unter Q mehr Gewicht gegeben als unter P. Damit besitzt M unter Q eine positive Drift. Man muss von M den wachsenden Prozess $\frac{1}{Z} \bullet [Z, M]$ abziehen, um ein Q-Martingal zu erhalten. Umgekehrt sieht es aus, wenn $[Z, M]$ fällt.

Beweis. Der Prozess A^Q ist von endlicher Variation, da Integrale nach Prozessen von endlicher Variation von endlicher Variation sind. Dabei ist wieder zu beachten, dass $P(\inf_{t\in[0,T]} Z_t > 0) = 1$, auf jedem festen Pfad ist der Integrand also gleichmäßig in der Zeit von der Null entfernt. Es muss gezeigt werden, dass M^Q ein Q-lokales Martingal ist. Nach Proposition 3.82 ist dies dazu äquivalent, dass $M^Q Z$ ein P-lokales Martingal ist. Es gilt

$$\begin{aligned} M^Q Z &= M_0^Q Z_0 + M_-^Q \bullet Z + Z_- \bullet M^Q + [M^Q, Z] \\ &= M_0^Q Z_0 + M_-^Q \bullet Z + Z_- \bullet M + Z_- \bullet \left(-\frac{1}{Z} \bullet [M, Z]\right) + [M, Z] + \left[-\frac{1}{Z} \bullet [M, Z], Z\right] \\ &= M_0^Q Z_0 + M_-^Q \bullet Z + Z_- \bullet M + \frac{\Delta Z}{Z} \bullet [M, Z] - \frac{1}{Z} \bullet [[M, Z], Z]. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\Delta Z}{Z} \bullet [M, Z] - \frac{1}{Z} \bullet [[M, Z], Z] = 0$. Damit wäre die Aussage bewiesen, da $M_-^Q \bullet Z$ und $Z_- \bullet M$ als Integrale nach P-lokalen Martingalen P-lokale Martingale sind. Den Prozess $[M, Z]$ kann man analog zu (3.44) als Prozess von endlicher in einen stetigen Anteil und in einen Sprunganteil zerlegen, d.h. $[M, Z] = [M, Z]^c + \sum_{0<s\le\cdot} \Delta M_s \Delta Z_s$. Es gilt $\frac{\Delta Z}{Z} \bullet [M, Z]^c - \frac{1}{Z} \bullet [[M, Z]^c, Z] = 0$ (das erste Integral ist Null, da ΔZ auf jedem Pfad nur zu abzählbar vielen Zeitpunkten ungleich Null ist und das zweite Integral verschwindet wegen $[[M, Z]^c, [M, Z]^c] = 0$ und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung). Für den Rest gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta Z}{Z} \bullet \left(\sum_{0<s\le\cdot} \Delta M_s \Delta Z_s\right) - \frac{1}{Z} \bullet \left[\sum_{0<s\le\cdot} \Delta M_s \Delta Z_s, Z\right] \\ &= \sum_{0<s\le\cdot} \frac{\Delta Z_s}{Z_s} \Delta M_s \Delta Z_s - \sum_{0<s\le\cdot} \frac{1}{Z_s} \Delta M_s \Delta Z_s \Delta Z_s = 0. \end{aligned}$$

□

Heuristik: Wenn die Zeit diskret ist, d.h. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, kann man (entsprechende Integrierbarkeit vorausgesetzt) schnell nachrechnen, dass M^Q ein Q-Martingal ist (beachte, dass $\frac{1}{Z}$ der Dichteprozess von P bzgl. Q ist, siehe Proposition 3.84):

$$\begin{aligned}
&E_Q(\Delta M_t^Q \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\
&= E_Q(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - E_Q\left(\frac{\Delta Z_t \Delta M_t}{Z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= E_Q(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) - E_Q\left(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) + E_Q\left(\frac{Z_{t-1}}{Z_t}\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= E_Q\left(Z_{t-1}\frac{M_t}{Z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) - E_Q\left(Z_{t-1}M_{t-1}\frac{1}{Z_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&\overset{M/Z \text{ \& } 1/Z \text{ sind } Q\text{-Martingale}}{=} Z_{t-1}\frac{M_{t-1}}{Z_{t-1}} - Z_{t-1}M_{t-1}\frac{1}{Z_{t-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.87. *Prozesse mit càdlàg Pfaden von endlicher Variation werden im Folgenden mit den von ihnen induzierten zufälligen Maßen identifiziert. Sei nämlich B ein monoton nicht-fallender Prozess, dann ist für festes $\omega \in \Omega$ durch $\mu_B((s,t],\omega) := B_t(\omega) - B_s(\omega) \geq 0$, $s < t$ ein (nicht-negatives) Maß auf der Borelschen σ-Algebra von $[0,T]$ gegeben. Die σ-Additivität von μ_B folgt aus der Rechtsstetigkeit der Pfade von B. Da sich Prozesse von endlicher Variation als Differenz zweier monotoner Prozesse schreiben lassen, können sie mit signierten Maßen identifiziert werden (Maße mit möglicherweiser negativer Masse).*

*Sei X ein stetiges Semimartingal mit einer Zerlegung (unter P) $X = M + A$, wobei $A_0 = 0$. Die Prozesse M und A sollen stetig sein. Außerdem soll das von A induzierte zufällige signierte Maß absolutstetig bzgl. des von dem monotonen Prozess $[M,M]$ induzierten zufälligen Maßes sein**. Damit lässt sich die Dichte*

$$\alpha_t = \frac{dA_t}{d[M,M]_t}, \quad t \in [0,T],$$

definieren. Die Dichte existiert zunächst aus einer pfadweisen Überlegung heraus. D.h. Messbarkeit in ω ist erstmal nicht klar. Man kann aber zeigen, dass man α (als Abbildung vom Produktraum $\Omega \times [0,T]$ nach $\mathbb{R}$) vorhersehbar wählen kann, siehe Proposition I.3.13. in Jacod/Shiryaev (2003) (Limit Theorems for Stochastic Processes). Es gilt

$$A = \alpha \bullet [M,M].$$

**Diese Absolutstetigkeit korrespondiert zur Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells, wenn X der Preisprozess eines risikobehafteten Wertpapiers ist und es daneben noch ein Wertpapier mit konstantem Preisprozess gibt. Wäre dA_t nämlich nicht absolutstetig bzgl. $d[M,M]_t$ dann gäbe es eine vorhersehbare Menge, auf der A entweder nur steigt oder nur fällt und auf der sich M mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht bewegt. Durch ein geschicktes Investment auf dieser Menge ließe sich eine Arbitrage erzielen.

Es soll nun ein neues Maß Q konstruiert werden mit $X = M^Q$, d.h. $A^Q = 0$. Q wird durch seinen Dichteprozess Z charakterisiert. Z sei gegeben durch

$$Z = 1 - (\alpha Z) \bullet M.$$

Z ist ein P-lokales Martingal. Um ein neues Maß konstruieren zu können, muss Z jedoch ein echtes Martingal sein (was im folgenden vorausgesetzt *wird). Es gilt*

$$[Z, M] = -(\alpha Z) \bullet [M, M].$$

Mit Theorem 3.85 folgt

$$\begin{aligned} M^Q &= M - \frac{1}{Z} \bullet [Z, M] \\ &= M + \alpha \bullet [M, M] \\ &= M + A \\ &= X. \end{aligned}$$

Theorem 3.88. *Sei B unter P eine Standard-Brownsche Bewegung, $\theta \in \mathbb{R}$ und Q gegeben durch*

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\theta B_T - \frac{\theta^2 T}{2}\right). \tag{3.70}$$

Dann ist der Prozess $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ mit $\widetilde{B}_t := B_t - \theta t$ eine Standard-Brownsche Bewegung unter Q.

Bemerkung 3.89. *Die Teilaussage, dass $\widetilde{B}$ ein Q-lokales Martingal ist, ist offenbar ein Spezialfall des Girsanov-Meyer-Theorems (Theorem 3.85). Beachte hierzu, dass der zu Q aus (3.70) gehörige Dichteprozess Z durch*

$$Z_t = E_P\left(\exp\left(\theta B_T - \tfrac{\theta^2 T}{2}\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \underset{\text{Theorem 2.27(iii)}}{=} \exp\left(\theta B_t - \tfrac{\theta^2 t}{2}\right)$$

gegeben ist. Mit Beispiel 3.71 folgt, dass Z die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$Z_t = 1 + (\theta Z) \bullet B_t. \tag{3.71}$$

erfüllt. Es folgt

$$\frac{1}{Z} \bullet [Z, B]_t = \frac{1}{Z} \bullet [(\theta Z) \bullet B, B]_t = \theta t.$$

Aus der Teilaussage folgt mit Lévys Theorem (Theorem 3.74), dass $\widetilde{B}$ unter Q eine Standard-Brownsche Bewegung ist.

Wir geben den Beweis von Theorem 3.88 nochmal ausführlich an, ohne Theorem 3.85 zu benutzen.

Beweis von Theorem 3.88 (ohne Benutzung von Theorem 3.85). Wir wollen zeigen, dass das Produkt $\widetilde{B}Z$ unter P ein lokales Martingal ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_t Z_t - \underbrace{\widetilde{B}_0 Z_0}_{=0} &= \widetilde{B} \bullet Z_t + Z \bullet \widetilde{B}_t + [\widetilde{B}, Z]_t \\
&\overset{(3.71)}{=} (\widetilde{B}\theta Z) \bullet B_t + Z \bullet B_t - (Z\theta) \bullet \mathrm{Id}_t + \underbrace{[B, (\theta Z) \bullet B]_t}_{= (\theta Z) \bullet [B,B]_t} \\
&= (\widetilde{B}\theta Z + Z) \bullet B_t,
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Id} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}, \quad (\omega, t) \mapsto t$. Da Integrale nach lokalen Martingalen lokale Martingale sind, folgt, dass $\widetilde{B}Z$ ein P-lokales Martingal ist und mit Proposition 3.82 ist $\widetilde{B}$ ein Q-lokales Martingal. Mit $[\widetilde{B}, \widetilde{B}]_t = [B, B]_t = t$ und Lévys Theorem (Theorem 3.74) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.90. *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$ die von dem Prozess B erzeugte Filtration. Dann ist Q aus (3.70) das einzige äquivalente Maß, das den Prozess $\widetilde{B}_t = B_t - \theta t$ zu einem lokalen Martingal macht. Nehme dazu an, $\widetilde{B}$ sei ein lokales Martingal bzgl. eines weiteren Maßes $\widetilde{Q} \sim P$. Da $\widetilde{Q}([\widetilde{B}, \widetilde{B}]_t = t) = P([\widetilde{B}, \widetilde{B}]_t = t) = 1$, ist mit Theorem 3.74 der Prozess $(\widetilde{B}_t)_{t\in[0,T]}$ eine Standard-Brownsche Bewegung unter $\widetilde{Q}$. Folglich gilt für die multivariate Verteilungsfunktion von $(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$, dass*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Q}(B_{t_1} - B_{t_0} \le y_1, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \le y_n) \\
&= \widetilde{Q}(\widetilde{B}_{t_1} - \widetilde{B}_{t_0} \le y_1 - \theta(t_1 - t_0), \ldots, \widetilde{B}_{t_n} - \widetilde{B}_{t_{n-1}} \le y_n - \theta(t_n - t_{n-1})) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_k - \theta(t_k - t_{k-1})} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_k - t_{k-1})}\right) dx.
\end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{Q}$ auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_T^B$, die von den Zufallsvariablen $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$ erzeugt wird, bereits eindeutig bestimmt. Also $\widetilde{Q} = Q$.

In der Sprache der Finanzmathematik heißt dies: wenn $\widetilde{B}$ der (diskontierte) Preisprozess eines Wertpapieres ist (Bachelier Modell), dann ist Q aus (3.70) das **eindeutige** *äquivalente Martingalmaß. Es gibt also nur eine Möglichkeit durch einen äquivalenten Maßwechsel die Drift von $\widetilde{B}$ herauszunehmen. Wie im Zeitdiskreten ist die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes i.W. dazu äquivalent, dass der Markt vollständig ist, also jede $\mathbb{F}^B$-messbare Zufallsvariable durch Handel mit dem Wertpapier mit Preisprozess $\widetilde{B}$ (und mit einem Wertpapier mit konstantem Preisprozess) repliziert werden kann.*

4 Modellierung arbitragefreier Finanzmärkte

Gegeben sei ein Finanzmarkt bestehend aus $d + 1$ handelbaren Wertpapieren, deren (zufälligen) Preisprozesse durch die *Semimartingale* $(S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t\in[0,T]}$ modelliert werden sollen. Betrachte eine Investorin mit Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$, die in diesem Finanzmarkt investieren möchte. Es sei ihr erlaubt, ihr Vermögen während der Laufzeit $[0,T]$ dynamisch zwischen den $d+1$ Anlagemöglichkeiten umzuschichten. Mit dem *vorhersehbaren* stochastischen Prozess $(\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d)_{t\in[0,T]}$ wird die *Handelsstrategie* der Investorin modelliert. φ_t^i steht für die Anzahl der Wertpapiere i, die die Investorin zum Zeitpunkt t im Portfolio hält. φ_t^i kann auch negative Werte annehmen, was bedeutet, dass sich die Investorin in diesem Wertpapier verschuldet hat. Um die bisherigen Resultate anwenden zu können, nehmen wir an, dass $\varphi^i \in \mathbb{L}$, $i = 0, \ldots, d$ (mit der allgemeinen Theorie ist diese Einschränkung nicht nötig, φ^i muss im Wesentlichen nur vorhersehbar sein). Mit

$$V_t := \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0,T]$$

bezeichnen wir den *Vermögensprozess* der Investorin.

Definition 4.1. *Eine Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ heißt selbstfinanzierend, wenn für den zugehörigen Vermögensprozess $V_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i$ gilt:*

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \bullet S_t^i, \quad t \in [0,T]. \tag{4.72}$$

Man sagt auch: φ ist selbstfinanzierend zum Startkapital v_0, wenn zudem $V_0 = v_0$ für ein vorgegebenes $v_0 \in \mathbb{R}$. Differentielle Schreibweise:

$$dV_t = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i \, dS_t^i, \quad t \in [0,T].$$

Interpretation: Eine Handelsstrategie φ ist selbstfinanzierend, wenn die Schwankungen des zugehörigen Vermögensprozesses $V(\varphi) = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S^i$ ausschließlich aus den Preisveränderungen der enthaltenen Wertpapiere resultieren. Es gibt also keine externe Kapitalentnahme oder -zuführung. Alle Umschichtungen des Portfolio müssen kostenneutral erfolgen.

Es macht in der Regel wenig Sinn, zwei Vermögen zu verschiedenen Zeitpunkten direkt miteinander zu vergleichen. 1 Euro zum Zeitpunkt 0 ist in der Regel mehr wert als 1 Euro zum Zeitpunkt 1. Deshalb vergleicht man beide Werte mit einem *Bezugsprozess* $(N_t)_{t\in[0,T]}$, den wir **Numeraire** nennen. Sprich, Wertgrößen werden als Vielfachheiten des Numeraires ausgedrückt. Statt V_t schauen wir uns den Prozess $\frac{V_t}{N_t}$ an.

Typisches Beispiel ist der Guthabenprozess eines "risikolosen" Bankkontos mit fester Verzinsung $r > 0$, d.h. $N_t = e^{rt}$, $t \in [0,T]$.

Eine solche Anlagemöglichkeit muss natürlich nicht existieren (Man beachte, dass keiner der Preisprozesse S^i, $i = 0, \ldots, d$, deterministisch sein muss).

Wegen möglicher Wechselkursrisiken ist für den Begriff der "Risikolosigkeit" auch von Bedeutung, in welcher Währung die Investorin rechnet. Wir werden später sehen, dass es rechentechnisch sinnvoll ist, für N den Preisprozess eines handelbaren Wertpapiers anzusetzen, also z.B. S^0. Auch ökonomisch kann es sinnvoll sein, ein *handelbares* Numeraire zu wählen. N_t lässt sich dann mit Startkapital N_0 am Markt erzeugen. Dies deutet, dass das erzielte Vermögen mit einer Referenzanlagemöglichkeit verglichen wird.

Zunächst wird aber nur vorausgesetzt, dass N ein Semimartingal ist mit

$$\inf_{t\in[0,T]} N_t > 0, \quad P\text{-f.s.} \tag{4.73}$$

(später meistens $N = S^0$, was bedeutet, dass wir Bedingung (4.73) auch an den Preisprozess S^0 stellen). Mit $\widehat{S}^i$ bzw. $\widehat{V}$ bezeichnen wir die diskontierten Preis- und Vermögensprozesse, d.h.

$$\widehat{S}^i := \tfrac{S^i}{N} \text{ und } \widehat{V} := \tfrac{V}{N} = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \widehat{S}^i.$$

Proposition 4.2. *Sei N ein Semimartingal, das (4.73) erfüllt. Dann sind der Prozess $1/N$ und die diskontierten Preisprozesse $\widehat{S}^i$, $i = 0, 1, \ldots, d$ Semimartingale.*

Bemerkung 4.3. *Da man die ursprünglichen Wertgrößen zurückerhält, indem man die diskontierten Wertgrößen mit dem neuen Numeraire $N' := \frac{1}{N}$ erneut diskontiert[††], gilt:*

Die diskontierten Wertgrößen sind genau dann Semimartingale, wenn die ursprünglichen Wertgrößen Semimartingale sind.

Beweis. Da Produkte von Semimartingalen wieder Semimartingale sind (Korollar 3.55), reicht es zu zeigen, dass der Prozess $\frac{1}{N}$ ein Semimartingal ist. Definiere dazu die wegen (4.73) lokalisierende Folge $T_n := \inf\{t \geq 0 \mid N_t \leq 1/n\} \wedge T$ und den "unmittelbar vor T_n" abgestoppten Prozess

$$N_t^n := \begin{cases} N_t & : \quad \text{für } t < T_n\,, \\ N_{T_n-} & : \quad \text{für } t \geq T_n \end{cases}$$

mit der Konvention $N_{0-} := 1$ (wenn das Numeraire unterhalb von $1/n$ startet, ist der neue Prozess also identisch 1). Offenbar ist N^n ein Semimartingal. Nun wende man die Itô-Formel auf N^n und eine Funktion $f_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, die $f_n(x) = 1/x$ für $x \geq 1/n$ erfüllt, an. Es folgt, dass $f_n(N^n)$ ein Semimartingal ist. Da nach Konstruktion $N^n \geq \frac{1}{n}$ ist auch $\frac{1}{N^n}$ ein Semimartingal. Damit ist auch $\frac{1}{N^{T_n}} = \frac{1}{N^n} + 1_{[\![T_n,T]\!]}\left(\frac{1}{N_{T_n}} - \frac{1}{N_{T_n-}}\right)$ ein Semimartingal, d.h. $\frac{1}{N}$ ist ein lokales Semimartingal. Da lokale Semimartingale Semimartingale sind (Theorem 3.24), folgt die Behauptung. □

Theorem 4.4. *Sei $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ eine Handelsstrategie und V der dazugehörige Vermögensprozess, d.h. $V_t = \sum_{i=0}^d \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0,T]$. φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\widehat{V}_t = \widehat{V}_0 + \sum_{i=0}^{d} \varphi^i \bullet \widehat{S}_t^i, \quad t \in [0,T]. \tag{4.74}$$

[††]Da die Pfade von N càdlàg sind, gilt $P(\sup_{t\in[0,T]} N_t < \infty) = 1$. Damit erfüllt N' die Bedingung (4.73), die wir an ein Numeraire gestellt haben.

Beweis. Sei φ eine Strategie, die (4.74) erfüllt. Damit ist $\widehat{V} = \widehat{V}(\varphi)$ ein Semimartingal (mit Proposition 4.2 sind die diskontierten Preisprozesse $\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d$ Semimartingale und stochastische Integrale nach Semimartingalen sind Semimartingale). Aus $V = \widehat{V}N$ folgt

$$\begin{aligned}
V &= V_0 + N_- \bullet \widehat{V} + \widehat{V}_- \bullet N + [N, \widehat{V}] \\
\left(\begin{matrix}\text{Assoz. \& } \Delta\widehat{V} = \sum_{i=0}^d \varphi^i \Delta\widehat{S}^i \text{ \&} \\ \text{Theorem 3.59}\end{matrix}\right) \rightarrow &= V_0 + \sum_{i=0}^d (\varphi^i N_-) \bullet \widehat{S}^i + \left(\sum_{i=0}^d \varphi^i \widehat{S}^i_-\right) \bullet N + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet [N, \widehat{S}^i] \\
\text{Assoz.} \rightarrow &= V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet (N_- \bullet \widehat{S}^i + \widehat{S}^i_- \bullet N + [N, \widehat{S}^i]) \\
&= V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet (N\widehat{S}^i) = V_0 + \sum_{i=0}^d \varphi^i \bullet S^i,
\end{aligned}$$

also ist φ selbstfinanzierend. Die Umkehrung folgt analog mit $N' = \frac{1}{N}$ und $\widehat{V} = VN'$. Beachte dabei, dass $N' = 1/N$ (wie N) ein Semimartingal ist, was im Beweis von Proposition 4.2 gezeigt wurde. □

Theorem 4.4 besagt, dass die Selbstfinanzierungseigenschaft einer Strategie φ nicht davon abhängt, ob alle Wertgrößen als Vielfachheiten der Eins oder als Vielfachheiten des Numeraires N verrechnet werden. Dies erweist sich als sehr nützlich, wenn das Numeraire der Preisprozess eines handelbaren Wertpapiers ist.

Ab jetzt sei $N = S^0$. Zu vorgegebenem Startkapital v_0 und Prozessen $\varphi^1, \dots, \varphi^d$ wähle man

$$\varphi^0_t := \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}^i_t - \sum_{i=1}^d \varphi^i_t \widehat{S}^i_t, \tag{4.75}$$

wobei $\widehat{v}_0 := v_0/S^0_0$. Man beachte, dass dies für $t = 0$ auf

$$\varphi^0_0 = \widehat{v}_0 - \sum_{i=1}^d \varphi^i_0 \widehat{S}^i_0$$

führt, da Integrale in 0 starten. Dies bedeutet, dass der nach Investment in die Wertpapiere S^1 bis S^d verbleibende Rest des Startkapitals v_0 in das Wertpapier S^0 investiert wird. Für die rechte Seite von (4.75) gilt

$$\begin{aligned}
&\widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}^i_t - \sum_{i=1}^d \varphi^i_t \widehat{S}^i_t \\
&\overset{\Delta(\varphi^i \bullet \widehat{S}^i) = \varphi^i \Delta\widehat{S}^i}{=} \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i \bullet \widehat{S}^i_{t-} - \sum_{i=1}^d \varphi^i_t \widehat{S}^i_{t-}, \quad \forall t \in (0, T].
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Wenn $\varphi^1, \dots, \varphi^d$ als adaptiert und linksstetig gewählt wurden, dann ist der Prozess in der letzten Zeile von (4.76) auch adaptiert und linksstetig. Damit ist φ^0 ein zulässiger

Integrand. Wegen $\varphi^0 \bullet \widehat{S}^0 = 0$ und Theorem 4.4 ist $(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ selbstfinanzierend zum Startkapital v_0 und es gilt

$$\widehat{V} = \widehat{v}_0 + \sum_{i=1}^{d} \varphi^i \bullet \widehat{S}^i. \tag{4.77}$$

Durch die Wahl von φ^0 in (4.75) ist also die Selbstfinanzierungsbedingung erfüllt, ohne dass φ^0 in die rechte Seite von (4.77) eingeht. Fortan können diskontierte Vermögenprozesse also mit der rechten Seite von (4.77) identifiziert werden, ohne dass man sich um die Selbstfinanzierungsbedingung kümmern muss.

Wir fassen obige Überlegungen in folgendem Theorem zusammen.

Theorem 4.5. *Zu jedem Prozess $(\varphi^1, \dots, \varphi^d) \in \mathbb{L}^d$ und jedem Startkapital v_0 existiert ein eindeutiges $\varphi^0 \in \mathbb{L}$, so dass $(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ selbstfinanzierend ist mit $\sum_{i=0}^d \varphi_0^i S_0^i = v_0$*

Die Existenz ist oben gezeigt. Für die Eindeutigkeit beachte man, dass $(\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ nur selbstfinanzierend mit Starkapital v_0 (d.h. diskontiertem Startkapital $\widehat{v}_0$) sein kann, wenn (4.75) gilt. Zudem kommt φ^0 auf der rechten Seite von (4.75) nicht vor.

4.1 Das Black-Scholes-Modell

Gegeben seien zwei Wertpapiere mit Preisprozessen S^0 und S^1.

$$S_t^0 = \exp(rt),\ t \geq 0, \quad r \in \mathbb{R},\ \text{“risikoloses Bankkonto”},$$

$$S_t^1 = s_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t), \quad t \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0, \tag{4.78}$$

d.h. $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ und $dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t)$, bzw. $S_t^1 = s_0 + (S^1\mu) \bullet \mathrm{Id}_t + (S^1\sigma) \bullet B_t$.

Nun wollen wir die berühmte *Black-Scholes Formel* herleiten[‡‡].

Derivate sind Wertpapiere, deren Auszahlung sich von den Werten anderer Größen, sog. **Basiswerte** (Underlyings), *ableitet*. Hier ist das Underlying die Aktie mit Preisprozess S^1. Wir betrachten zunächst nur Derivate, deren Auszahlung lediglich vom Wert der Aktie (Underlying) zum Zeitpunkt T abhängt:

(Plain Vanilla)	Call-Option: Auszahlung	$H = (S_T^1 - K)^+$
	Put-Option:	$H = (K - S_T^1)^+$
allgemein	pfadunabhängiger Claim	$H = g(S_T^1)$,

wobei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig ist.

[‡‡]ohne Benutzung des sog. Martingaldarstellungssatzes, siehe Theorem 4.10

Problem: Finde selbstfinanzierendes Portfolio, das nur aus "Bonds" S^0 und Aktien S^1 besteht, d.h. $V_t = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t^1 S_t^1$, und den Claim H mit Wahrscheinlichkeit 1 repliziert, d.h.

$$V_T = v_0 + \varphi^0 \bullet S_T^0 + \varphi^1 \bullet S_T^1 = H \quad \text{P-f.s.} \tag{4.79}$$

Zudem soll $v_0 \in \mathbb{R}$, die Kosten der Replikation von H, minimal sein. D.h. es darf kein $v_0' < v_0$ geben, so dass (4.79) für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Startkapital v_0' gilt.

Beispiel 4.6. *Sei $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, d.h. $H = aS_T^1$. Diese Auszahlung ist trivialerweise replizierbar. Wähle dazu $\varphi^0 = 0$, $\varphi^1 = a$ und $v_0 = aS_0^1$. Es gilt*

$$aS_T^1 = aS_0^1 + a(S_T^1 - S_0^1) + 0 \cdot (S_T^0 - S_0^0).$$

D.h. lineare Auszahlungen sind stets replizierbar (unabhängig vom stochastischen Modell). Problem: g ist i.A. nicht linear.

Ansatz: *Nehme an*, es existieren $v_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi^0, \varphi^1 \in \mathbb{L}$ und eine „Wertfunktion" $v(\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, [0,T)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, [0,T])$* mit

$$\underbrace{v(S_t^1, t)}_{\text{prospektives Kapital}} = \underbrace{v_0 + \varphi^0 \bullet S_t^0 + \varphi^1 \bullet S_t^1}_{\text{retrospektives Kapital}} \text{ und } v(x,T) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}. \tag{4.80}$$

Interpretation: Man nimmt an, dass die Auszahlung $g(S_T^1)$ replizierbar ist und bezeichne mit $v(s,t)$ das (minimale) Kapital, das dazu benötigt wird, wenn der Aktienkurs zum Zeitpunkt t gerade den Wert s annimmt.

Wir wollen zunächst *notwendige* Bedingungen an v_0, φ^0, φ^1 und $v(\cdot,\cdot)$ formulieren, so dass (4.80) erfüllt werden kann. Damit werden wir eine Hedging-Strategie (φ^0, φ^1) und eine Wertfunktion v bestimmen, von denen man dann zeigt, dass sie (4.80) tatsächlich erfüllen.

Sei $v \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times [0,T))$. Mit der Itô-Formel gilt für alle $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned} v(S_t^1, t) &= v(s_0, 0) + \int_0^t \partial_1 v(S_s^1, s)\, dS_s^1 + \int_0^t \partial_2 v(S_s^1, s)\, ds \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \int_0^t \partial_{11} v(S_s^1, s)(S_s^1)^2 \sigma^2\, ds \\ &\overset{!}{=} v_0 + r \underbrace{\int_0^t \varphi_s^0 S_s^0\, ds}_{= \int_0^t \varphi_s^0\, dS_s^0} + \int_0^t \varphi_s^1\, dS_s^1. \qquad (4.81) \\ &\overset{!}{=} v_0 + r \int_0^t \underbrace{(v(S_s^1, s) - \varphi_s^1 S_s^1)}_{= \varphi_s^0 S_s^0 \text{ wegen Ansatz (4.80)\& Selbstfinanzierungsbedingung}} ds + \int_0^t \varphi_s^1\, dS_s^1. \qquad (4.82) \end{aligned}$$

*Die Funktion soll aus $C^{2,1}$ sein, um die Itô-Formel anwenden zu können. Da jedoch die Auszahlungsfunktion g nur als stetig vorausgesetzt wurde und $v(x,T) = g(x)$ für alle x gelten muss, kann Differenzierbartkeit nach der ersten Variablen sinnvollerweise nur auf $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0,T)$ gefordert werden. Die zusätzlich geforderte Stetigkeit auf $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0,T]$ sichert dann den Grenzübergang $t \uparrow T$.

Durch die Forderung, dass (φ^0, φ^1) selbstfinanzierend sein soll, erhält man also zu jedem φ^1 ein passendes φ^0 und letzteres muss nicht mehr explizit in der Gleichung vorkommen. Setze nun

$$\varphi_s^1 := \partial_1 v(S_s^1, s), \quad \forall s \in [0, T],$$

und $v_0 := v(s_0, 0)$. Damit stimmen die dB_t-Terme auf beiden Seiten von (4.81) überein (dB_t geht nur in dS_t^1 ein). Die Übereinstimmung der Drift-Terme ist äquivalent zu

$$\int_0^t \partial_2 v(S_s^1, s)\, ds + \tfrac{1}{2} \int_0^t \partial_{11} v(S_s^1, s)(S_s^1)^2 \sigma^2\, ds \overset{!}{=} r \int_0^t (v(S_s^1, s) - \partial_1 v(S_s^1, s) S_s^1)\, ds. \quad (4.83)$$

(4.83) ist offenbar erfüllt, wenn v auf $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T]$ die folgende partielle Differentialgleichung (PDE) erfüllt

$$\tfrac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{11} v(x, t) + rx \partial_1 v(x, t) + \partial_2 v(x, t) = rv(x, t), \quad \forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T) \quad (4.84)$$

mit der Endbedingung

$$v(x, T) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.85)$$

(4.85) ergibt sich aus (4.80). Die partielle Differentialgleichung (4.84) mit Endbedingung (4.85) wird als *Black-Scholes Differentialgleichung* bezeichnet.

4.1.1 Lösung der Black-Scholes Differentialgleichung

Im Folgenden wollen wir die PDE (4.84) mit Endbedingung (4.85) mit einer Funktion $v \in \mathcal{C}^{2,1}((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T)) \cap \mathcal{C}^0((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T])$ lösen und damit die Existenz beweisen. Dazu setzen wir voraus, dass g stetig ist und

$$|g(x)| \leq L(1 + |x|^\gamma), \quad \gamma > 1, \quad (4.86)$$

erfüllt. Die Lösung ist dann auch eindeutig in der Menge $\mathcal{C}^{2,1}((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T)) \cap \mathcal{C}^0((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T])$ und unter einer polynomiellen Wachstumsbedingung (für den Eindeutigkeitsbeweis siehe z.B. Karatzas und Shreve [2], Satz 7.6 in Kapitel 5, Seite 366).

Man beachte hierbei die Unterscheidung zwischen $[0, T)$ und $[0, T]$. Strikt vor T soll die Funktion zweimal stetig differenzierbar in x sein, um die Itô-Formel anwenden zu können. Für $t = T$ ist aber z.B. die Auszahlungsfunktion $g(x) = (x - K)^+$ nicht zweimal stetig differenzierbar in x. Andererseits soll v auf der gesamten Menge $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T]$ stetig sein. Ansonsten wäre die Lösung auf $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0, T)$ nicht mehr an die Endbedingung gekoppelt, was letztere sinnlos machen würde und auch die Eindeutigkeit der Lösung verletzen würde.

Schritt 1: Zunächst möchten wir die partielle Differentialgleichung (4.84) mit Endbedingung (4.85) durch geeignete Substitutionen in die sog. **Wärmeleitungsgleichung**

$$\partial_2 \widetilde{v}(y, \tau) = \partial_{11} \widetilde{v}(y, \tau), \quad \forall (y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T]$$

mit Anfangsbedingung

$$\widetilde{v}(y,0) = \widetilde{g}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

überführen.

Dazu machen wir zunächst folgende Variablentransformation: $x = \exp(y)$ (bzw. $y = \ln(x)$) und $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$ (bzw. $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$). Man beachte, dass letzteres eine Umkehrung der Zeit bedeutet. Zudem ist τ eine Business-Time, die bei höherer Volatilität schneller verstreicht. Wir setzen

$$f(y,\tau) = v\left(\exp(y), T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right)$$

und sehen, dass die Endbedingung (4.85) zur Anfangsbedingung

$$f(y,0) = g(\exp(y))$$

mutiert. Für die benötigten partiellen Ableitungen von f gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 f(y,\tau) &= \partial_1 v(x,t)x \\ \partial_{11} f(y,\tau) &= \partial_1 v(x,t)x + \partial_{11} v(x,t)x^2 \\ \partial_2 f(y,\tau) &= -\frac{2}{\sigma^2}\partial_2 v(x,t) \end{aligned}$$

Damit lässt sich (4.84) umschreiben zu

$$\frac{\sigma^2}{2}\partial_{11} f(y,\tau) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_1 f(y,\tau) + r\partial_1 f(y,\tau) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_2 f(x,\tau) - rf(y,\tau) = 0.$$

Multiplikation mit $2/\sigma^2$ ergibt

$$\partial_{11} f(y,\tau) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\partial_1 f(y,\tau) - \frac{2r}{\sigma^2} f(y,\tau) = \partial_2 f(y,\tau).$$

Mit $\gamma := \frac{2r}{\sigma^2}$ ergibt dies

$$\partial_{11} f(y,\tau) + (\gamma - 1)\,\partial_1 f(y,\tau) - \gamma f(y,\tau) = \partial_2 f(y,\tau).$$

Nun machen wir den Ansatz

$$f(y,\tau) = \exp(\alpha y + \beta\tau)h(y,\tau)$$

Für die benötigten partiellen Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 f(y,\tau) &= \exp(\alpha y + \beta\tau)(\alpha h(y,\tau) + \partial_1 h(y,\tau)) \\ \partial_{11} f(y,\tau) &= \exp(\alpha y + \beta\tau)(\alpha^2 h(y,\tau) + 2\alpha\partial_1 h(y,\tau) + \partial_{11} h(y,\tau)) \\ \partial_2 f(y,\tau) &= \exp(\alpha y + \beta\tau)(\beta h(y,\tau) + \partial_2 h(y,\tau)) \end{aligned}$$

Es ergibt sich die PDE

$$\partial_{11}h(y,\tau) + (2\alpha+\gamma-1)\partial_1 h(y,\tau) + (\alpha^2 + (\gamma-1)\alpha - \gamma - \beta)h(y,\tau) = \partial_2 h(y,\tau)$$

Die Parameter α und β können nun so gewählt werden, dass $\partial_1 h$ und h verschwinden und zwar mit

$$\alpha = \frac{1-\gamma}{2} \tag{4.87}$$

und

$$\beta = \alpha^2 + (\gamma-1)\alpha - \gamma = \frac{(\gamma-1)^2}{4} - \frac{(\gamma-1)^2}{2} - \gamma = -\frac{(\gamma-1)^2}{4} - \gamma = -\frac{(\gamma+1)^2}{4}. \tag{4.88}$$

Wir müssen also die PDE

$$\partial_{11}h(y,\tau) = \partial_2 h(y,\tau), \quad y \in \mathbb{R}, \tau \in \left(0, \frac{\sigma}{2}T\right] \tag{4.89}$$

mit Anfangsbedingung

$$h(y,0) = \widetilde{g}(y) := \exp(-\alpha y) g(\exp(y)), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4.90}$$

wobei $\alpha = (1-\gamma)/2$, lösen. $\widetilde{g}$ ist stetig, weil g stetig ist.

Feststellung: Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Die Dichte

$$h^{y_0}(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(y_0-y)^2}{4\tau}\right) \tag{4.91}$$

der Normalverteilung $\mathcal{N}(y, 2\tau)$ an der Stelle y_0 als Funktion in den Parametern y und τ betrachtet erfüllt die PDE (4.89) für alle $(y,\tau) \in \mathbb{R} \times (0, (\sigma T)/2]$ (zunächst ohne Anfangsbedingung, man beachte, dass für $\tau = 0$ eine entsprechende Dichte gar nicht existieren würde).

Die Feststellung ergibt sich durch folgende Rechnungen

$$\begin{aligned}
\partial_2 h^{y_0}(y,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(\frac{(y-y_0)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{4\tau}\right) \\
\partial_1 h^{y_0}(y,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(-\frac{y-y_0}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{4\tau}\right) \\
\partial_{11} h^{y_0}(y,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \left(\frac{(y-y_0)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{4\tau}\right)
\end{aligned}$$

Ausgehend von den Lösungen (4.91) für feste y_0 definieren wir uns nun eine Funktion, die die PDE mit Anfangsbedingung (4.90) lösen soll. Setze

$$\begin{aligned}
h(y,\tau) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(y_0) h^{y_0}(y,\tau)\, dy_0 \\
&= E(\widetilde{g}(Y^{y,2\tau})), \quad y \in \mathbb{R}, \tau \in \left(0, \frac{\sigma}{2}T\right],
\end{aligned} \tag{4.92}$$

wobei $Y^{y,2\tau}$ eine $\mathcal{N}(y, 2\tau)$-verteilte Zufallvariable ist. Unter der Voraussetzung, dass Integration nach y_0 und Differentiation nach τ bzw. y vertauscht werden dürfen, gilt

$$\begin{aligned}
\partial_2 h(y,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(y_0)\partial_2 h^{y_0}(y,\tau)\,dy_0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(y_0)\partial_{11} h^{y_0}(y,\tau)\,dy_0 \\
&= \partial_{11} h(y,\tau), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tau \in \left(0, \frac{\sigma}{2}T\right].
\end{aligned}$$

Bleibt die Stetigkeit von h an den Stellen (y,τ) mit $\tau = 0$ zu zeigen, wenn h auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ durch (4.90) definiert wird. Für $(y_n, \tau_n) \to (y, 0)$, $n \to \infty$, konvergiert $Y^{y_n,2\tau_n}$ für $n \to 0$ stochastisch gegen y. Da $\widetilde{g}$ stetig ist, folgt, dass auch $\widetilde{g}(Y^{y_n,2\tau_n})$ für $n \to \infty$ stochastisch gegen $\widetilde{g}(y)$ konvergiert. Unter der gemachten Wachstumsbedingung (4.86) an g ist die Folge von Zufallsvariablen $(\widetilde{g}(Y^{y_n,2\tau_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar und es folgt

$$h(y_n, \tau_n) = E(\widetilde{g}(Y^{y_n,2\tau_n})) \to \widetilde{g}(y), \quad n \to \infty.$$

Damit ist die durch (4.90) und (4.92) definierte Funktion stetig und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Durch Rücktransformation wollen wir nun die Lösung der Black-Scholes Differentialgleichung bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&v(x,t) \\
&= f\left(\ln(x), \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \\
&= \exp\left(\alpha\ln(x) + \beta\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) h\left(\ln(x), \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \\
&= \exp\left(\alpha\ln(x) + \beta\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(z-\ln(x))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \exp(-\alpha z) g(\exp(z))\,dz \\
&\overset{\eta:=z-\ln(x)}{=} \exp\left(\beta\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \exp(-\alpha\eta) g(x\exp(\eta))\,d\eta \\
&\overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \exp\left(\beta\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2(T-t)\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(\eta+\alpha\sigma^2(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) g(x\exp(\eta))\,d\eta \\
&= \exp\left(-r(T-t)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \\
&\quad \times g\left(x\exp\left(r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \xi\right)\right) d\xi,
\end{aligned}$$

wobei in die letzte Gleichung die Substitution $\xi := \eta + \alpha\sigma^2(T-t)$ und die Rechnungen $\eta = \xi - \alpha\sigma^2(T-t) = \xi + \frac{2r-\sigma^2}{2\sigma^2}\sigma^2(T-t) = \xi + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ und $\beta + \alpha^2 = \frac{1}{4}\left(-(\gamma+1)^2 + (\gamma-1)^2\right) = -\gamma = -\frac{2r}{\sigma^2}$ eingehen (für die letzte Gleichungskette beachte die Definitionen von α und β in (4.87) bzw. (4.88) und $\gamma := \frac{2r}{\sigma^2}$).

4.1.2 Formaler Beweis der Replizierbarkeit von $g(S_T^1)$

Wir wissen jetzt also, wie eine Replikationsstrategie aussehen müsste, wenn sie existiert. Beim formalen Beweis, dass φ^1 tatsächlich eine Replikationsstrategie ist, geht man gerade umgekehrt vor, beginnt also mit der Lösung von (4.84).

Sei $v \in \mathcal{C}^{2,1}((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0,T)) \cap \mathcal{C}^0((\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times [0,T])$ die Lösung der PDE (4.84) mit Endbedingung (4.85). Setze

$$\varphi_s^1 := \partial_1 v(S_s^1, s), \quad \forall s \in [0,T) \tag{4.93}$$

und

$$\varphi_s^0 := e^{-rs}\left[v(S_s^1, s) - \partial_1 v(S_s^1, s) S_s^1\right], \quad \forall s \in [0,T).$$

Es gilt also $\varphi_s^0 S_s^0 + \varphi_s^1 S_s^1 = v(S_s^1, s)$.

φ^0 und φ^1 sind zulässige Integranden (Hedging-Strategien), da sie adaptierte und stetige Prozesse sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
v(S_t^1, t) &\overset{\text{Itô \& (4.84)}}{=} v(s_0, 0) + \int_0^t \partial_1 v(S_s^1, s)\, dS_s^1 + r\int_0^t (v(S_s^1, s) - \underbrace{\partial_1 v(S_s^1, s)}_{=\varphi_s^1} S_s^1) ds \\
&\overset{\text{Wahl von } \varphi^1 \text{ \& } \varphi^0}{=} v(s_0, 0) + \int_0^t \varphi_s^1\, dS_s^1 + r\int_0^t \varphi_s^0 S_s^0\, ds \\
&= v(s_0, 0) + \int_0^t \varphi_s^1\, dS_s^1 + \int_0^t \varphi_s^0\, dS_t^0, \qquad t \in [0,T).
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Damit ist (φ^0, φ^1) selbstfinanzierend. Aus der Stetigkeit der Funktion v und des Prozesses S^1 folgt $v(S_t^1, t) \to v(S_T^1, T) = g(S_T)$ P-f.s. für $t \to T$. Damit konvergiert auch die rechte Seite von (4.94) für $t \to T$ gegen eine endliche Zufallsvariable. In diesem Sinne ist (4.94) auch für $t = T$ erfüllt. Mehr können wir an dieser Stelle über das Integral bis $t = T$ jedoch noch nicht sagen. Da g nur als stetig und nicht als Lipschitz-stetig vorausgesetzt wurde, ist die Existenz des Limes φ_t^1 für $t \to T$ nicht sichergestellt und es gilt i.A. $\varphi^1 \notin \mathbb{L}$.

Bemerkung 4.7. *Bei einer Derivateauszahlung, die nichtlinear in S_T^1 ist, gilt typischerweise $\partial_{11} v(x,t) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $t \in [0,T)$. Mit der Itô-Formel impliziert dies, dass die Hedging-Strategie (4.93) von unendlicher Variation ist. Es gilt nämlich*

$$\partial_1 v(S_t^1, t) = \partial_1 v(S_0^1, 0) + \int_0^t \partial_{11} v(S_s^1, s)\, dS_s^1 + \int_0^t \ldots\, ds.$$

Bei proportionalen (oder sogar fixen) Transaktionskosten würde die Strategie also zum sofortigen Ruin führen.

Wir haben gezeigt, dass ein Claim (Zufallsvariable) der Form $H = g(S_T^1)$ replizierbar ist. Im Folgenden wählen wir S^0 als Numeraire, d.h.

$$\widehat{S}_t^0 \equiv 1 \text{ und } d\widehat{S}_t^1 = \widehat{S}_t^1((\mu - r)dt + \sigma dB_t).$$

Mit obiger Replikationsstrategie φ^1 und dem Startkapital $v_0 := v(s_0, 0)$ gilt

$$\frac{g(S_T^1)}{S_T^0} = v_0 + \varphi^1 \bullet \widehat{S}_T^1 \quad \text{P-f.s.}$$

Bemerkung 4.8. *Der Martingaldarstellungssatz, siehe Theorem 4.10, liefert sogar, dass* **jeder** *Claim $H : \Omega \to \mathbb{R}_+$, der $\sigma(B_t, t \in [0,T])$-messbar ist und eine gewisse Integrierbarkeitsbedingung erfüllt, durch den Endwert eines stochastischen Integral darstellbar ist. D.h. jeder Claim kann durch eine dynamische Handelsstrategie in der Aktie (und dem Bond) gewonnen werden. Ein Finanzmarktmodell, das diese Eigenschaft erfüllt wird* **vollständig** *genannt. Vollständigkeit hängt also sowohl von der Menge Ω der Zuständen ab, die in dem stochastischen Modell berücksichtigt werden sollen, als auch von den Preisprozessen der Wertpapiere, in die investiert werden kann.*

Wir führen zunächst einen Maßwechsel durch. Der diskontierte Aktienpreisprozess $\widehat{S}^1$ erfüllt die SDE

$$d\widehat{S}_t^1 = \widehat{S}_t^1((\mu - r)\,dt + \sigma\,dB_t),$$

d.h.

$$\widehat{S}_t^1 = \left(\widehat{S}^1(\mu - r)\right) \bullet \mathrm{Id}_t + \left(\widehat{S}^1\sigma\right) \bullet B_t.$$

Mit der Substitution $\widetilde{B}_t := B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\, t$ folgt

$$d\widehat{S}_t^1 = \widehat{S}_t^1\sigma\,d\widetilde{B}_t.$$

Definiere ein neues Maß Q durch

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\;B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}\right).$$

Nach Theorem 3.88 ist $\widetilde{B}$ eine Standard-Brownsche Bewegung unter Q und $\widehat{S}^1$ damit ein Q-Martingal. Aus (4.94) folgt nach Diskontierung

$$\exp(-rt)v(S_t^1, t) = v(s_0, 0) + \varphi^1 \bullet \widehat{S}_t^1, \quad t \in [0, T].$$

Vom Integral $\varphi^1 \bullet \widehat{S}^1$ wissen wir erstmal nur, dass es ein Q-lokales Martingal ist. Andererseits weiß man von der Lösung v, dass sie eine „stochastische Darstellung" besitzt, genauer

$$v(S_t^1, t) = \exp(-r(T-t))E_Q(g(S_T^1) \mid \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

(siehe wieder Karatzas und Shreve [2], Satz 7.6 in Kapitel 5, Seite 366). Damit ist $\varphi^1 \bullet \widehat{S}^1$ ein echtes Q-Martingal, das wegen $g \geq 0$ nach unten beschränkt ist. Umgekehrt sind $v(s_0, 0)$ die minimalen Replikationskosten für $g(S_T^1)$, wenn man fordert, dass der Wert des Hedging-Portfolios während der gesamten Laufzeit nach unten beschränkt ist (lokale Martingale, die nach unten beschränkt sind, sind Supermartingale, so dass man im Q-Erwartungswert höchstens verlieren kann).

Bemerkung 4.9. *Der Quotient* $\frac{\mu-r}{\sigma}$ *wird* **Marktpreis des Risikos** *genannt. Er ist i.d.R. positiv, könnte bei risiko-suchenden Marktteilnehmern aber auch negativ werden.*

Theorem 4.10 (Martingaldarstellungssatz)**.** *Sei M ein lokales Martingal bzgl. der von einer Brownschen Bewegung B erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$. Dann lässt sich M darstellen als*

$$M_t = v_0 + \varphi \bullet B_t \quad \forall t \in [0,T] \quad P\text{- f.s.}, \tag{4.95}$$

wobei φ ein vorhersehbarer stochastischer Prozess ist mit $\int_0^T (\varphi_t)^2\, dt < \infty$, P-f.s.

Bemerkung 4.11. *Für diese Darstellung reicht es i.A. nicht mehr aus, nur linksstetige Integranden zu betrachten. D.h. wir haben (strenggenommen) das Integral, das man in (4.95) braucht, gar nicht definiert.*

Beweis. Siehe Korollar 2 auf Seite 156. □

Wendet man Theorem 4.10 auf $\widetilde{B}$, Q und das Martingal $t \mapsto E_Q(\widehat{H}|\mathcal{F}_t)$†an, so erhält man

$$E_Q(\widehat{H} \mid \mathcal{F}_t) = v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet \widetilde{B}_t = v_0 + \widetilde{\varphi} \quad \bullet \quad \left[\frac{1}{\widehat{S}^1\sigma} \bullet \widehat{S}^1\right]_t = v_0 + \underbrace{\frac{\widetilde{\varphi}}{\widehat{S}^1\sigma}}_{\text{Hedging- Strategie}} \bullet \widehat{S}^1_t,$$

insbesondere $v_0 = E_Q(\widehat{H})$.

Die Black-Scholes-Formel

Wir erhalten für den Claim $H = g(S^1_T)$ den fairen Preis (zum Zeitpunkt 0)

$$p = e^{-rT} E_Q(g(S^1_T)),$$

also im Falle eines europäischen Calls:

$$p(s_0, r, \sigma, T, K) = e^{-rT} E_Q((S^1_T - K)^+).$$

Da S^1 unter Q eine geometrische Brownsche Bewegung mit Startwert s_0, Drift r und Volatilität σ ist, lässt sich p leicht bestimmen.

Wir berechnen $E((be^Z - c)^+)$ für eine $\mathcal{N}(a, \gamma^2)$- verteilte Zufallsvariable Z, d.h. Z ist

†Die Auszahlung H muss unter Q integrierbar sein.

normalverteilt mit Erwartungswert a und Varianz γ^2 (vgl. z.B. Irle 1998, Seite 155).

$$
\begin{aligned}
E(be^Z - c)^+ &= \int_{\{z|be^z>c\}} (be^x - c)\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\gamma^2}}\ dx \\
&= b\int_{\ln(\frac{c}{b})}^{\infty} e^x\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\gamma^2}}\ dx - cP(Z > \ln(\tfrac{c}{b})) \\
&= be^{a+\frac{\gamma^2}{2}} \int_{\ln(\frac{c}{b})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}\ e^{-\frac{(x-a-\gamma^2)^2}{2\gamma^2}}\ dx - cP\left(\frac{Z-a}{\gamma} > \frac{\ln(\frac{c}{b})-a}{\gamma}\right) \\
&= be^{a+\frac{\gamma^2}{2}} P\left(Z+\gamma^2 > \ln(\tfrac{c}{b})\right) - cP\left(\frac{Z-a}{\gamma} \le \frac{a-\ln(\frac{c}{b})}{\gamma}\right) \\
&= be^{a+\frac{\gamma^2}{2}} P\left(\frac{Z-a}{\gamma} > \frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)-\gamma^2-a}{\gamma}\right) - c\Phi\left(\frac{a-\ln(\frac{c}{b})}{\gamma}\right) \\
&= be^{a+\frac{\gamma^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{b}{c})+a+\gamma^2}{\gamma}\right) - c\Phi\left(\frac{\ln(\frac{b}{c})+a}{\gamma}\right), \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Setzt man in (4.96) $b = s_0$, $a = (r - \frac{\sigma^2}{2})T$, $\gamma = \sigma\sqrt{T}$ und $c = K$, so erhält man die berühmte Black-Scholes-Formel:

$$
\boxed{p(s_0, r, \sigma, T, K) = s_0\Phi\left(\frac{\ln(\frac{s_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{s_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}
$$

Bemerkung 4.12. *Es gilt* $p(s_0, r, \sigma, T, K) \to (s_0 - K)^+$ *für* $T \to 0$. *Des weiteren gilt*

$$p(s_0, r, \sigma, T, K) \to s_0 \quad \text{für } \sigma \to \infty$$

und

$$p(s_0, r, \sigma, T, K) \to (s_0 - e^{-rT}K)^+ \quad \text{für } \sigma \to 0.$$

Der Optionspreis im Black-Scholes Modell hängt also von 5 Parametern ab, s_0, r, σ, T, K.

Gewisse partielle Ableitungen von p nach diesen Parametern werden als die *Greeks* bezeichnet

$\Delta := \partial_{s_0} p > 0$ "Delta der Option"

Hedge-Parameter

$\Gamma := \partial_{s_0 s_0} p > 0$ "Gamma der Option"

"Wie schnell ist Hedge-Portfolio umzuschichten..."

$\Theta := -\partial_T p < 0$ "Theta der Option"

Optionswert wächst mit der Restlaufzeit

$\mathcal{V} := \partial_\sigma p > 0$ "Vega der Option" (wird manchmal auch mit "Lambda der Option" bezeichnet

Optionswert wächst mit der Volatilität der Aktie

$\partial_K p < 0$

Ein Portfolio heißt z.B. **Delta-neutral**, wenn die Summe der Deltas über alle Positionen, die im Portfolio enthalten sind, Null ergibt.

Zudem gilt wegen $(K - S_T)^+ = K - S_T + (S_T - K)^+$ und damit

$$E_Q(e^{-rT}(K - S_T)^+) = e^{-rT}K - \underbrace{E_Q(e^{-rT}S_T)}_{=s_0} + E_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+)$$

die sog. **Put-Call-Parität**:

$$\text{Putpreis} = e^{-rT}K - s_0 + \text{Callpreis}.$$

Historische versus implizite Volatilität:

Um obige Theorie anwenden zu können, müssen numerische Werte für die Parameter s_0, r, T, K und σ festgelegt werden (Kalibrierung). s_0, T, K können direkt beobachtet werden. Die Zinsrate r bestimmt sich aus dem Preis $B(0,T)$, den ein Bond mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt 0 besitzt, durch die Gleichung $B(0,T)\exp(rT) = 1$, also

$$r = \frac{-\ln(B(0,T))}{T}.$$

Einziges Problem ist das Schätzen der Volatilität σ. Nimmt man die Voraussetzungen, die man im Black-Scholes Modell gemacht hat, ernst, kann die Vola sehr robust aus historischen Daten geschätzt werden. Definiere hierzu die äquidistanten Gitterpunkte $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t$ mit $\Delta t > 0$ und

$$\xi_i := \ln\left(\frac{S^1_{i\Delta t}}{S^1_{(i-1)\Delta t}}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\left(B_{i\Delta t} - B_{(i-1)\Delta t}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ sind unabhängig und normalverteilt mit

$$E_P(\xi_i) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$$

und

$$\mathrm{Var}_P(\xi_i) = \sigma^2\Delta t.$$

σ kann somit mit Hilfe der Stichprobenvarianz konsistent geschätzt werden, also

$$\sigma^\star = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\xi_i - \bar{\xi})^2}}{\sqrt{\Delta t}},$$

wobei

$$\bar{\xi} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_P((\sigma^\star)^2) &= \mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\Delta t}}-\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\Delta t}}\right)^2\right)\\
&= \frac{n\mathrm{Var}_P\left(\left(\xi_1/\sqrt{\Delta t}-E_P(\xi_1/\sqrt{\Delta t})\right)^2\right)+o(n)}{(n-1)^2}\\
&= \frac{2\sigma^4+o(1)}{n},\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung beachte man, dass $(\xi_1 - E_P(\xi_1))\,/\sqrt{\Delta t}$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 ist und für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable N gilt

$$\mathrm{Var}(N^2) = \underbrace{E(N^4)}_{\text{Wölbung der Normalverteilung}} -(E(N^2))^2 = 3-1 = 2.$$

Die Varianz des (quadrierten) Schätzers geht also mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen Null. Interessant ist dabei, dass die Beobachtungen alle aus einem festen Zeitintervall stammen können, das nicht mit n wächst und beliebig klein sein kann, etwa $0 < \Delta t < 2\Delta t < \ldots < n\Delta t < \varepsilon$. **Die Genauigkeit des Schätzers $\sigma^\star$ hängt von n, nicht aber von Δt ab.** Man muss also, um einen statistisch guten Schätzer zu bekommen, theoretisch (!) nur beliebig kurz in die Vergangenheit zurückgehen. Dies korrespondiert mit dem früheren Ergebnis in Theorem 2.34, dass die quadratische Variation der Brownschen Bewegung ein deterministischer Prozess ist. Den Schätzer $\sigma^\star$ nennt man die **historische Volatilität**.

Im Gegensatz dazu bestimmt sich die **implizite Volatilität** implizit aus dem Preis einer Option. Sei p^M der Marktpreis einer Call-Option mit Fälligkeit T und Strike K. Die implizite Volatilität $\sigma(K,T)$ der Option bestimmt sich durch die Gleichung

$$p^M = p^{\mathrm{BS}}(s_0, r, \sigma(K,T), T, K).$$

Beim Call ist p^{BS} streng monoton steigend in σ und kann alle Werte strikt zwischen $(s_0 - Ke^{-rT})^+$ (Grenzwert für $\sigma\to 0$) und s_0 (Grenzwert für $\sigma\to\infty$) annehmen.

Wenn p^M also im Intervall

$$((s_0 - Ke^{-rT})^+, s_0)$$

liegt, existiert auch ein eindeutiges $\sigma(K,T)$.

Definition 4.13. *In einem Finanzmarktmodell mit $d+1$ Wertpapieren heißt $\varphi\in\mathbb{R}^{d+1}$ eine* **statische Arbitrage**, *wenn $\sum_{i=0}^d \varphi^i S_0^i = 0$, $P\left(\sum_{i=0}^d \varphi^i S_T^i \geq 0\right) = 1$ und $P\left(\sum_{i=0}^d \varphi^i S_T^i > 0\right) > 0$.*

Das Finanzmarktmodell heißt **statisch arbitragefrei**, *wenn es in ihm keine statische Arbitrage gibt.*

Proposition 4.14. *Sei der Aktien- und der Bondpreisprozess wie im Black-Scholes Modell gegeben und bestehe der Markt zudem aus einer Call-Option auf die Aktie mit Strike* $K > 0$*, die zum Zeitpunkt* 0 *zum Preis* p *gehandelt wird. Dann ist das Marktmodell genau dann statisch arbitragefrei, wenn* $p \in ((s_0 - Ke^{-rT})^+, s_0)$.

Sprechweise: Eine statische Arbitrage, nennt man **Käuferarbitrage**, wenn die Option long und **Verkäuferarbitrage**, wenn die Option short ist.

Beweis. Wenn $p \geq s_0$ dann kann man durch Kauf *einer* Aktie und Leerverkauf *eines* Calls eine statische Arbitrage erzielen. Sei $p \leq (s_0 - K\exp(-rT))^+$. Ein nichtpositiver Optionspreis liefert bereits ohne Investments in Aktie und Bonds eine Käuferarbitrage. Im Fall $s_0 - K\exp(-rT) > 0$ shorte man eine Aktie und kaufe $K\exp(-rT)$ Bonds, was zusammen mit dem Besitz einer Option eine Arbitrage liefert.

Sei nun umgekehrt $p \in ((s_0 - Ke^{-rT})^+, s_0)$. Es ist zu zeigen, dass es keine statische Arbitrage gibt. $aS_T + b\exp(rT)$ kann die Auzahlung $(S_T - K)^+$ nur mit Wahrscheinlichkeit 1 dominieren, wenn $a \geq 1$ und $b \geq 0$ (hierzu betrachte man die Situationen, dass S_T sehr groß bzw. sehr klein wird). Wegen $p < s_0$, kann man daher keine Verkäuferarbitrage erzielen.

Betrachte nun ein Portfolio, das aus *einer* Option, a Aktien und b Bonds besteht und zum Zeitpunkt 0 ohne Kosten aufgebaut werden kann, also $as_0 + b + p = 0$. Wir untersuchen zunächst die Situation, dass $S_T = s_0\exp(rT)$, wobei die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses 0 ist. Der diskontierte Aktienpreis bleibt in diesem Szenario also konstant. Andererseits ist wegen $\exp(-rT)(s_0\exp(rT) - K)^+ = (s_0 - K\exp(-rT))^+ < p$ die diskontierte Optionsauszahlung kleiner als der Optionspreis. Damit ist der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt T in diesem Szenario negativ. Zu dem festen Portfolio existiert ein $\varepsilon > 0$. s.d. der Portfoliowert auf der gesamten Menge $\{S_T \in [s_0\exp(rT) - \varepsilon, s_0\exp(rT) + \varepsilon\}$ negativ ist. Da diese Menge für beliebige $\varepsilon > 0$ eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, gibt es keine Käuferarbitrage. □

Wegen Proposition 4.14 ist also davon auszugehen, dass der Marktpreis des Calls in dem Intervall liegt und $\sigma(K, T)$ somit existiert. Andernfalls würde unter recht allgemeinen Bedingungen an das stochastische Modell eine Arbitrage existieren, die keinen dynamischen Handel erfordern würde (und somit einfach zu realisieren wäre).

Die implizite Volatilität ist also die Volatilität, die der logarithmierte Aktienpreisprozess haben müsste, damit der Black-Scholes Preis der Option mit dem tatsächlichen Marktpreis übereinstimmt. Wären die Voraussetzungen des Black-Scholes Modells alle erfüllt, so müsste in einem arbitragefreien Markt die implizite Volatilität $\sigma(K, T)$ für alle K und T mit der tatsächlichen Volatilität σ übereinstimmen (und letztere könnte sehr genau durch die historische Volatilität $\sigma^\star$ geschätzt werden). Da dies aber nicht der Fall ist, unterscheiden sich implizite und historische Volatilität signifikant. Insbesondere hängt $\sigma(K, T)$ tatsächlich von K und T ab. Man spricht von einer Volatilitätsfläche ("volatility surface").

Auch wenn auf den ersten (und vielleicht auch den zweiten) Blick implizite Volatilitätsflächen keine ökonomisch sinnvollen Größen sind (sie beruhen auf dem Black-Scholes

Modell, das aber durch die nicht flache Gestalt der Volatilitätsflächen falsifiziert wird), ist es oft zweckmäßig mit impliziten Volatilitäten zu arbeiten. So kann man die implizite Volatilität einer sehr liquiden Option bestimmen und zur Bewertung einer weniger liquiden Option benutzen. Durch die implizite Volatilität werden auch **Markterwartungen** bzgl. der zukünftigen Volatilität eingebaut.

4.2 Lokales Volatilitätsmodell

Nun soll ein Aktienpreismodell entwickelt werden, das vollständig ist (d.h. jeder Claim ist replizierbar) und dessen eindeutige Derivatepreise mit **allen** am Markt beobachteten Call-Preisen $C(K,T)$ übereinstimmt. Wir idealisieren, indem wir annehmen, dass Optionen zu beliebiges Strikes und Fälligkeiten am Markt gehandelt werden.

Für den Aktienpreis $S^1 = S$ machen wir den Ansatz

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma(t, S_t)\,dB_t), \quad S_0 = s_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \tag{4.97}$$

wobei B eine Standard Brownsche Bewegung unter dem Bewertungsmaß Q ist.

Im Gegensatz zum Konzept der impliziten Volatilität soll also ein Aktienpreismodell entwickelt werden, das alle am Markt beobachteten Plain Vanilla Optionspreise gleichzeitig aufnimmt. Damit tritt keine Inkonsistenz mehr auf. Die Funktion des Modelle besteht dann darin, weniger liquide Derivate, für die es keine Marktpreise gibt, zu bewerten.

Theorem 4.15 (Dupire Formel). *Sei $C(K,T) := E_Q(\exp(-rT)(S_T - K)^+)$ für alle K, T, wobei S die SDE (4.97) erfüllt mit einer glatten Funnktion $\sigma(\cdot,\cdot)$. Dann gilt zwischen $C(\cdot,\cdot)$ und $\sigma(\cdot,\cdot)$ der folgende Zusammenhang*

$$\frac{1}{2}K^2\sigma^2(T,K) = \frac{\partial_T C(K,T) + rK\partial_K C(K,T)}{\partial_{KK} C(K,T)}, \tag{4.98}$$

wobei $\partial_T C$ etc. die partiellen Ableitungen bezeichnen.

Beweisskizze. S_T ist stetig verteilt (ohne Beweis) mit Dichtefunktion $x \mapsto f(x,T)$. Ableiten von $E_Q(\exp(-rT)(S_T - K)^+)$ nach K ergibt mit dem Differentiationslemma (Vertauschung von Ableitung nach K und Integral über ω)

$$\partial_K C(K,T) = -\exp(-rT)Q(S_T > K) \tag{4.99}$$

und

$$\partial_{KK} C(K,T) = \exp(-rT)f(K,T). \tag{4.100}$$

Wie in der Heuristik aus Kapitel 1 wenden wir nun die Itô-(Tanaka-)Formel auf $s \mapsto (s-K)^+$ an. Da die 2. Ableitung für $s \approx K$ explodiert, muss die Funktion durch glatte Funktionen f_ε approximiert werden:

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } x \leq K - \varepsilon\,, \\ \frac{(x-K+\varepsilon)^2}{4\varepsilon} & : \quad \text{für } x \in (K-\varepsilon, K+\varepsilon) \\ x - K & : \quad \text{für } x \geq K + \varepsilon \end{cases}$$

Die Ableitung von f_ε steigt zwischen $K-\varepsilon$ und $K+\varepsilon$ von 0 auf 1 linear an. Aus der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(S_T) &= f_\varepsilon(S_0) + \int_0^T f'_\varepsilon(S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''_\varepsilon(S_t)\,d[S,S]_t \\ &= f_\varepsilon(S_0) + \int_0^T f'_\varepsilon(S_t)\,dS_t + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T 1_{\{K-\varepsilon\le S_t\le K+\varepsilon\}}\,d[S,S]_t. \end{aligned}$$

Zum einen gilt $f_\varepsilon(S_T)\downarrow (S_T-K)^+$ für $\varepsilon\downarrow 0$. Zum anderen konvergiert $\int_0^T f'_\varepsilon(S_t)\,dS_t$ gegen $\int_0^T 1_{\{S_t>K\}}\,dS_t$ für $\varepsilon\to 0$, wobei das letztere Integral eigentlich erst im Skript ,,Finanzmathematik in stetiger Zeit" definiert wird (die Konvergenz ergibt sich aus der punktweisen Konvergenz der Integranden für $S\neq K$). Damit muss auch der Limes von $\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T 1_{\{K-\varepsilon\le S_t\le K+\varepsilon\}}\,d[S,S]_t$ existieren und es gilt

$$(S_T-K)^+ = (S_0-K)^+ + \int_0^T 1_{\{S_t>K\}}\,dS_t + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T 1_{\{K-\varepsilon\le S_t\le K+\varepsilon\}}\,d[S,S]_t,$$

wobei $d[S,S]_t = S_t^2\sigma^2(t,S_t)\,dt$. Integration by parts ergibt

$$\begin{aligned} &\exp(-rT)(S_T-K)^+ \\ &= (S_0-K)^+ + \int_0^T \exp(-rt)1_{\{S_t>K\}}\,dS_t \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T \exp(-rt)1_{\{K-\varepsilon\le S_t\le K+\varepsilon\}}S_t^2\sigma^2(t,S_t)\,dt - r\int_0^T \exp(-rt)(S_t-K)^+\,dt. \end{aligned}$$

Bildet man nun den Erwartungswert folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} &E_Q\left(\exp(-rT)(S_T-K)^+\right) \\ &= (S_0-K)^+ + r\int_0^T \exp(-rt)E_Q\left(S_t 1_{\{S_t>K\}}\right)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \exp(-rt)f(K,t)K^2\sigma^2(t,K)\,dt \\ &\quad -r\int_0^T \exp(-rt)E_Q((S_t-K)^+)\,dt \\ &= (S_0-K)^+ + rK\int_0^T \exp(-rt)Q(S_t>K)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \exp(-rt)f(K,t)K^2\sigma^2(t,K)\,dt. \end{aligned}$$

Ableiten nach T ergibt

$$\partial_T C(K,T) = rK\exp(-rT)Q(S_T>K) + \frac{1}{2}\exp(-rT)f(K,T)K^2\sigma^2(T,K).$$

Zusammen mit (4.99) und (4.100) folgt

$$\partial_T C(K,T) = -rK\partial_K C(K,T) + \frac{1}{2}\partial_{KK}C(K,T)K^2\sigma^2(K,T).$$

□

Formal haben wir zu einem gegeben $\sigma(\cdot,\cdot)$ die Optionspreise und ihre Ableitungen im Strike und der Fälligkeit ausgerechnet. Bei der Kalibrierung geht man nun natürlich gerade umgekehrt vor: zu gegebenem $C(\cdot,\cdot)$ ist $\sigma(\cdot,\cdot)$ zu bestimmen, das $C(\cdot,\cdot)$ erzeugt. Hierzu beachte man, dass im theoretischen Modell folgende Randbedingungen für $E_Q(\exp(-rT)(S_T-K)^+)$ unabhängig von der Wahl von $\sigma(\cdot,\cdot)$ stets gelten: $C(0,T)=E_Q(\exp(-rT)S_T)=s_0$ und $C(K,0)=(s_0-K)^+$. In realen Anwendungen sind die Ableitungen in (4.98) natürlich durch finite Differenzen zu ersetzen. Unter recht allgemeinen Bedingungen kann so eine positive Volatilitätsfunktion $\sigma(\cdot,\cdot)$ konstruiert werden. Hierzu beachte man:

- Wenn $K\mapsto C(K,T)$ nicht fallend oder nicht konvex wäre, dann würde eine „modellunabhängige" statische Arbitrage existieren: für $K_1<K_2$ dominiert die Auszahlung des Calls mit Strike K_1. Damit folgt aus statischer Arbitragefreiheit, dass $C(K_1,T)\geq C(K_2,T)$. Zudem gilt für alle $\lambda\in[0,1]$

$$\lambda(S_T-K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T-K_2)^+ \geq (S_T-\lambda K_1-(1-\lambda)K_2)^+$$

  und damit $\lambda C(K_1,T)+(1-\lambda)C(K_2,T)\geq C(\lambda K_1+(1-\lambda)K_2,T)$.

- Sei Zins nichtnegativ. Wenn $T\mapsto C(K,T)$ nicht steigend wäre, dann würde eine „modellunabhängige" statische Arbitrage existieren (folgt aus Proposition 4.14).

4.3 Stochastische Volatilitätsmodelle

In obigem Modell ist die Brownsche Bewegung B der einzige Risikofaktor. Sie treibt über den Aktienpreis auch die Volatilität an. Im Gegensatz dazu spricht man von einem **stochastischen Volatilitätsmodell**, wenn die Volatilität von einer weiteren Brownschen Bewegung angetrieben wird. Wir diskutieren hier exemplarisch das vielleicht wichtigste Beispiel eines stochastischen Volatilitätsmodells: das **Heston-Modell**

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu\,dt+\sqrt{\nu_t}\,dB_t^S), \quad S_0=s_0>0 \\ d\nu_t &= \kappa(\theta-\nu_t)\,dt+\xi\sqrt{\nu_t}\,dB_t^\nu, \quad \nu_0>0. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Hierbei sind B^S und B^ν Standard-Brownsche Bewegungen mit

$$[B^S,B^\nu]_t=\rho t, \quad \text{für alle } t\in[0,T]$$

und einer Korrelationskonstanten $\rho\in(-1,1)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer (positiven) Lösung für ν ist nicht offensichtlich, ist aber durch $\xi^2\leq 2\kappa\theta$ sichergestellt (obige SDE für ν werden wir in einer späteren Vorlesung über Zinsmodelle noch ausführlich untersuchen). Gegeben eine Lösung ν ergibt sich S mit Theorem 3.69 als

$$S_t=s_0\exp\left(\mu t+\int_0^t\sqrt{\nu_s}\,dB_s^S-\frac{1}{2}\int_0^t\nu_s\,ds\right), \quad t\in[0,T].$$

Bemerkung 4.16. *(1) Typischerweise wird $\rho < 0$ gewählt. Dies bedeutet, dass die Volatilität bei sinkendem Aktienkurs eher steigt und bei steigendem Aktienkurs eher fällt.*

(2) Die Mean-Reverting-Eigenschaft des Volatilitätsprozesses bedeutet, dass er immer wieder zum Niveau θ zurückgetrieben wird.

Wir wollen nun das System (4.101) durch zwei stochastisch unabhängige Brownsche Bewegungen ausdrücken. Hierzu definiere

$$B_t := \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} B_t^S - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} B_t^\nu. \tag{4.102}$$

B ist ein lokales Martingal mit

$$\begin{aligned}
[B,B]_t &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} B^S - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} B^\nu, \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} B^S - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} B^\nu \right]_t \\
&= \frac{1}{1-\rho^2} t - 2 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho t + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} t \\
&= t
\end{aligned}$$

und

$$[B,B^\nu]_t = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} B^S - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} B^\nu, B^\nu \right]_t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho t - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} t = 0.$$

Mit der zweidimensionalen Version des Satzes von Lévy folgt, dass (B, B^ν) eine zweidimensionale Standard-Brownsche Bewegung ist, insbesondere sind B und B^ν also unabhängig voneinander. Löst man (4.102) nach B^S auf, so sieht man, dass sich (B^S, B^ν) durch eine lineare Transformation der Standard-Brownschen Bewegung (B, B^ν) gewinnen lässt. (4.101) lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t(\mu\, dt + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\nu_t}\, dB_t + \rho\sqrt{\nu_t}\, dB_t^\nu), \quad S_0 = s_0 > 0 \\
d\nu_t &= \kappa(\theta - \nu_t)\, dt + \xi\sqrt{\nu_t}\, dB_t^\nu, \quad \nu_0 > 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.17. *Das Marktmodell mit Aktienpreis S aus (4.101) ist unvollständig. Optionen lassen sich nicht durch dynamischen Handel nur in der Aktie replizieren und es gibt unendlich viele Martingalmaße.*

4.4 Sprungrisiko

Betrachte nun statt S^1 aus (4.78) einen Aktienpreisprozess $\widetilde{S}$ mit Preisdynamik.

$$\widetilde{S}_t^1 = s_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t + a N_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \lambda t(\exp(a) - 1) \right), \quad t \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ a \neq 0,$$

wobei N ein von B stochastisch unabhängiger Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$ ist. Zusätzlich zum Diffusionsanteil kann es also Sprünge der Höhe $\Delta\widetilde{S}^1_t = \widetilde{S}^1_{t-}(\exp(a) - 1)$ geben.

Ein Call $(\widetilde{S}^1_T - K)^+$ oder ein Put $(K - \widetilde{S}^1_T)^+$ ist in diesem Modell **nicht replizierbar**. Wieso ? Nehme etwa an, die **Call-Auszahlung** $(\widetilde{S}^1_T - K)^+$ sei replizierbar mit einer dynamischen Hedging-Strategie $\widetilde{\varphi}^1$ und einem Startkapital $\widetilde{v}_0$, d.h.

$$P\left(\widetilde{v}_0 + \widetilde{\varphi}^1 \bullet \widetilde{S}^1_T = (\widetilde{S}^1_T - K)^+\right) = 1,$$

wenn wir o.B.d.A. $r = 0$ setzen (Gewinne im Bankkonto müssen damit nicht betrachtet werden). Da $P(N_T = 0) = \exp(-\lambda T) > 0$ (mit echt positiver Wahrscheinlichkeit gibt es keinen Sprung), muss $\widetilde{\varphi}^1$ auch eine Replikationsstrategie im entsprechenden Black-Scholes Modell ohne Sprünge sein und auch das erforderliche Kapital muss mit dem im Black-Scholes Modell übereinstimmen. Um die dB_t-Terme zu neutralisieren muss dafür wie in (4.81) gelten

$$\widetilde{\varphi}^1_s := \partial_1 v(\widetilde{S}^1_{s-}, s), \quad \forall s \in [0, T], \tag{4.103}$$

wobei v (erforderliches Kapital in Abhängigkeit vom Aktienkurs und der Zeit) die Wertfunktion aus dem Black-Scholes Modell ist. Aus der Itô-Formel mit Sprüngen (Theorem 3.64), der Wahl von $\widetilde{\varphi}^1$ in (4.103) und der Tatsache, dass v die PDE $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{11} v(x,t) + \partial_2 v(x,t) = 0$ löst, folgt

$$\begin{aligned}
&v(\widetilde{S}^1_t, t) - v(s_0, 0) - \int_0^t \partial_1 v(\widetilde{S}^1_{s-}, s)\, d\widetilde{S}^1_s \\
&= \int_0^t \partial_2 v(\widetilde{S}^1_{s-}, s)\, ds + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t \partial_{11} v(\widetilde{S}^1_{s-}, s)(\widetilde{S}^1_{s-})^2\sigma^2\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_t}\left(v(\widetilde{S}^1_{T_i}, T_i) - v(\widetilde{S}^1_{T_i-}, T_i) - \partial_1 v(\widetilde{S}^1_{T_i-}, T_i)\Delta\widetilde{S}^1_{T_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t}\left(\underbrace{v(\widetilde{S}^1_{T_i}, T_i) - v(\widetilde{S}^1_{T_i-}, T_i) - \partial_1 v(\widetilde{S}^1_{T_i-}, T_i)\Delta\widetilde{S}^1_{T_i}}_{>0,\text{ da } v(\cdot,t) \text{ strikt konvex}}\right) \\
&= \text{Hedging-Fehler},
\end{aligned}$$

wobei $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Sprungzeitpunkte von N sind, d.h. $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{(t \geq T_i)}$ mit $T_1 < T_2 < \ldots$.

4.5 Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)

Wir wollen nun interessante und in der Praxis verbreitete dynamische Investitionsstrategien untersuchen. Dabei nehmen wir an, dass ein (kurzfristig) risikoloses Wertpapier mit Preisprozess

$$X_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right), \quad t \geq 0,$$

und ein risikobehaftetes Wertpapier mit Preisprozess S zur Verfügung stehen. S sollte man sich als einen Aktienindex vorstellen, in den direkt investiert werden kann. Ein Problem großer institutioneller Anleger wie Versicherungen ist, dass sie einen großen Anteil des eingesetzten Kapitals garantieren wollen oder müssen, was ihre Investitionsmöglichkeiten in risikobehaftete Anlagen, die im Erwartungswert höhere Erträge liefern, wesentlich einschränkt. Ein Ausweg können sog. Wertsicherungskonzepte wie CPPI sein. CPPI verfolgt das Ziel, durch eine dynamische Handelsstrategie einen vorgegebenen Anteil des Kapitals garantieren zu können, aber gleichzeitig vom höheren erwarteten Ertrag der risikobehafteten Anlage ,,essentiell" zu profitieren. Es wird eine asymmetrische Renditeverteilung angestrebt: Verluste sollen beschränkt und an besonders positiven Entwicklungen des Aktienindexes soll überproportional partizipiert werden. Dies wird erreicht, indem der Aktienindex nach einer Aufwärtsbewegung nachgekauft und die Position nach einer Abwärtsbewegung reduziert wird. Wenn die Märkte sehr gut laufen, erzielt man damit sogar mehr Gewinn als wenn das gesamte Startkapital V_0 statisch in die Aktien investiert wird. Und das obwohl letztere Strategie keine Kapitalgarantie beinhaltet (im Black Scholes Modell kann der Aktienkurs beliebt nahe an die Null kommen). Im Folgenden versuchen wir, die Strategie zunächst verbal zu beschreiben.

Zum Zeitpunkt 0 wird das Starkapital V_0 gedanklich aufgespalten. Für ein $\lambda \in [0,1)$ wird λV_0 wird ausschließlich risikolos investiert, was in t den Betrag $F_t := \lambda V_0 \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right)$ ergibt. Bei deterministischem Zins r ist dies die Garantie (ansonsten nehme man eine deterministische untere Abschätzung, also z.B. λV_0). F_t wird **Untergrenze (floor)** genannt. Das verbleibende Kapital $(1-\lambda)V$, das typischerweise nicht so groß ist, versucht man nun so in die Aktie zu investieren, dass man **superlinear** von Aufwärtsbewegungen profitiert und im schlimmsten Fall nur alles verliert (also keine Schulden hat, die durch F_t getilgt werden müssten)[‡].

Genauer: Es wird nun ein frei wählbares konstantes Vielfaches (multiple) $m \in (0,\infty)$ des **Puffers (cushion)**

$$C_t := V_t - \lambda V_0 \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right) \tag{4.104}$$

in das risikobehaftete Wertpapier investiert, d.h.

$$\varphi_t = \frac{mC_{t-}}{S_{t-}}. \tag{4.105}$$

Für $m > 1$ bedeutet dies, dass man sich im risikolosen Wertpapier verschulden muss (neben der oben beschriebenen Long-Position in X), um die Strategie selbstfinanzierend zu machen.

Wir betrachten zunächst den Fall eines stetigen Aktienpreisprozessen, der die SDE

$$dS_t = S_t\left(\mu_t\, dt + \sigma_t\, dB_t\right), \quad S_0 = s_0, \tag{4.106}$$

[‡]Beispiel: Gebe es einen über die Zeit konstanten jährlichen Zins von 2%. Nach einer Laufzeit von 15 Jahren möchte ein Investmentfonds, der CPPI betreibt, die Rückzahlung des eingesetzte Kapitals garantieren. Also wird $\lambda = 1.02^{-15} \approx 0.743$ gewählt.

erfüllt, wobei $\mu, \sigma \in \mathbb{L}$ (also recht beliebige stochastische Prozesse). Mit Theorem 3.69 gilt

$$S_t = s_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\,ds\right).$$

Formal setzen wir nur $m \in (0, \infty)$ voraus, wobei sich obige Interpretationen ausschließlich auf den Fall $m > 1$ beziehen.

Theorem 4.18. *Zu gegebenem Startkapital $v_0 > 0$ existierte eine eindeutige selbstfinanzierende Strategie (η, φ), die (4.104), (4.105) und $V_0 = v_0$ erfüllt, wobei V der Vermögensprozess zu (η, φ) ist, d.h. $V = \eta X + \varphi S$. Es gilt*

$$\varphi_t = \frac{m(1-\lambda)v_0}{s_0^m} S_t^{m-1} \exp\left(\frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2\,ds + (1-m)\int_0^t r_s\,ds\right) \tag{4.107}$$

und

$$V_t = \lambda v_0 \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right) + \frac{(1-\lambda)v_0}{s_0^m} S_t^m \exp\left(\frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2\,ds + (1-m)\int_0^t r_s\,ds\right).$$

Bemerkung 4.19. *Im Black-Scholes Modell (in dem r und σ ja konstant sind) ist das Vermögen in t also eine direkte Funktion des Aktienkurses in t und t selber. Es hängt also nicht zusätzlich vom Aktienkursverlauf ab, was man ob des dynamischen Umschichtens vielleicht erwartet hätte.*

Beweis von Theorem 4.18. Wegen

$$\varphi_t = \frac{mV_t - m\lambda v_0 \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right)}{S_t} \tag{4.108}$$

und

$$\eta_t X_t \quad = \quad V_t - \varphi_t S_t = (1-m)V_t + m\lambda V_0 \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right)$$

führt die Selbstfinanzierungsbedingung (4.72) zu folgender SDE für V:

$$V_t = v_0 + \int_0^t \left((1-m)V_s + m\lambda V_0 \exp\left(\int_0^s r_u\,du\right)\right) r_s\,ds + \int_0^t \frac{m\left(V_s - \lambda V_0 \exp\left(\int_0^s r_u\,du\right)\right)}{S_s}\,dS_s.$$

Beachte hierzu, dass für die Gewinne im Bankkonto gilt: $\eta_t\,dX_t = \eta_t X_t r_t\,dt$.

Für den Puffer C erhält man die SDE:

$$C_t = C_0 + \int_0^t \frac{mC_s}{S_s}\,dS_s + \int_0^t (1-m)C_s r_s\,ds \tag{4.109}$$

also

$$C = C_0 \mathcal{E}\left(m \int_0^\cdot \frac{1}{S_s}\, dS_s + (1-m) \int_0^\cdot r_s\, ds\right).$$

Nach Theorem 3.69 ist die Lösung gegeben durch

$$C_t = C_0 \exp\left(m \int_0^t \frac{1}{S_s}\, dS_s + (1-m) \int_0^t r_s\, ds - \frac{m^2}{2} \int_0^t \frac{1}{S_s^2} d[S,S]_s\right) \tag{4.110}$$

Mit $\int_0^t \frac{1}{S_s}\, dS_s = \ln(S_t) - \ln(s_0) + \int_0^t \frac{1}{2S_s^2}\, d[S,S]_s$ folgt

$$\begin{aligned} C_t &= (1-\lambda)v_0 \exp\Bigg(m \ln(S_t) - m\ln(s_0) + \frac{m}{2}\int_0^t \frac{1}{S_s^2} d[S,S]_s \\ &\quad +(1-m)\int_0^t r_s\, ds - \frac{m^2}{2}\int_0^t \frac{1}{S_s^2} d[S,S]_s\Bigg) \\ &= (1-\lambda)v_0 \frac{S_t^m}{s_0^m} \exp\left(\frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds + (1-m)\int_0^t r_s\, ds\right). \end{aligned} \tag{4.111}$$

Für die Strategie ergibt dies

$$\varphi_t = \frac{mC_t}{S_t} = m(1-\lambda)v_0 \frac{S_t^{m-1}}{s_0^m} \exp\left(\frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds + (1-m)\int_0^t r_s\, ds\right).$$

□

Bemerkung 4.20. *Für $m = 1$ ist die Strategie buy-and-hold. Für $m > 1$ ist die Strategie offenbar monoton steigend im Aktienpreis. Wenn der Preis steigt wird also nachgekauft. Betrachtet man nur den Puffer und nicht den Floor wird mehr als 100 % des Vermögens in die Aktie investiert (Leverage/Fremdkapitalaufnahme), d.h. man verschuldet sich im Bond. Bei Leverage fällt der relative Anteil des Aktienvermögens nachdem die Aktie gestiegen ist. Dies liegt daran, dass die Schulden im Bond relativ an Gewicht verlieren und der Aktienanteil von oben den 100 % näherkommt. Um den relativen Anteil m konstant zu halten, müssen also Aktien nachgekauft werden.*

Bemerkung 4.21. *Im Black-Scholes Modell vereinfacht sich das Endvermögen der CPPI Strategie zu*

$$\begin{aligned} V_T &= \lambda v_0 \exp(rT) + (1-\lambda)v_0 \exp\left(m\mu T + m\sigma B_T + (1-m)rT - \frac{m^2}{2}\sigma^2 T\right) \\ &= \lambda v_0 \exp(rT) \\ &\quad +(1-\lambda)v_0 \exp\left(m(\mu - r)T + rT + m\sigma B_T - \frac{m^2}{2}\sigma^2 T\right) \end{aligned} \tag{4.112}$$

(vgl. (4.111)). Es folgt

$$E(V_T) = \lambda v_0 \exp(rT) + (1-\lambda)v_0 \exp(m(\mu - r)T + rT).$$

Man sieht, dass für festes $\lambda \in [0,1)$, also einer festen Kapitalgarantie, das erwartete Endvermögen für $m \to \infty$ gegen ∞ konvergiert, wenn $\mu > r$. Mit einer statischen Strategie hätte dies im Black-Scholes Modell nicht gelingen können. Die Kapitalgarantie hätte die Zahl der Aktien, die im Portfolio gehalten werden können, beschränkt.

Trotzdem hat die CPPI Strategie, im Vergleich zu einer statischen Kombination aus Aktie und Bond, selbst unter den idealisierenden Modellannahmen auch gravierende Nachteile. So beträgt der Median von V_T

$$\mathrm{median}(V_T) = \lambda v_0 \exp(rT) + (1-\lambda) v_0 \exp\left(m(\mu - r)T + rT - \frac{m^2}{2}\sigma^2 T \right),$$

was aus (4.112) und $\mathrm{median}(B_T) = 0$ *folgt. Für $m \to \infty$ konvergiert der Median also gegen nicht mehr als das garantierte Kapital $\lambda v_0 \exp(rT)$, was natürlich enttäuschend ist.*

Nun verallgemeinern wir (4.106) etwas, indem wir endlich viele verschiedene Sprunghöhen

$$-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$$

des Aktienpreisen zulassen, also

$$dS_t = S_{t-} \left(\mu_t \, dt + \sigma_t \, dB_t + \sum_{k=1}^n a_k dN_t^k \right),$$

wobei $N^1, \ldots, N^n$ von B und voneinander unabhängige Poisson-Prozesse mit Parametern λ_i sind. Der Puffer bleibt genau dann mit Wahrscheinlichkeit 1 positiv, wenn $a_1 m > -1$. Man sagt, dass die Strategie in diesem Fall kein **gap risk** („Lückenrisiko") besitzt. (4.105) und die Selbstfinanzierungsbedingung führen auf die SDE

$$C_t = C_0 + \int_0^t \frac{mC_{s-}}{S_{s-}} \, dS_s + \int_0^t (1-m) C_{s-} r_s \, ds$$

bzw.

$$dC_t = mC_{t-}\mu_t \, dt + mC_{t-}\sigma_t \, dB_t + mC_{t-} \sum_{k=1}^n a_k dN_t^k + (1-m)C_{t-} r_t \, dt$$

C/C_0 ist also das stochastische Exponential des Prozesses

$$L_t := m \int_0^t \mu_s \, ds + m \int_0^t \sigma_s \, dB_s + m \sum_{k=1}^n a_k N_t^k + (1-m) \int_0^t r_s \, ds.$$

Nach Theorem 3.69 gilt

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 \mathcal{E}(L)_t \\ &= C_0 \exp\left(L_t - \frac{1}{2}[L,L]_t^c \right) \prod_{0<s\le t} ((1+\Delta L_s)\exp(-\Delta L_s)) \\ &= C_0 \exp\left(m \int_0^t \mu_s \, ds + m \int_0^t \sigma_s \, dB_s + (1-m) \int_0^t r_s \, ds - \frac{m^2}{2} \int_0^t \sigma_s^2 \, ds \right) \\ &\qquad \times \prod_{k=1}^n \prod_{0<s\le t} (1 + m a_k \Delta N_s^k) \end{aligned} \tag{4.113}$$

Die Idee ist nun wieder, $\int_0^t \mu_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s$ durch $\ln(S_t)$ auszudrücken. Es gilt

$$
\begin{aligned}
m\,(\mu_t\, dt + \sigma_t\, dB_t) &= m\frac{1}{S_{t-}} dS_t - m\frac{\Delta S_t}{S_{t-}} \\
&= m d\ln(S_t) + \frac{m}{2}\frac{1}{S_{t-}^2} d[S,S]_t^c - m\Delta\ln(S_t) \\
&= m d\ln(S_t) + \frac{m}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds - m\sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k\Delta N_t^k), \qquad (4.114)
\end{aligned}
$$

wobei sich die zweite Gleichheit aus der Itô-Formel mit Sprüngen ergibt und in die dritte Gleichheit eingeht, dass unabhängige Poisson-Prozesse nicht gleichzeitig springen. Aus (4.113) und (4.114) folgt

$$
\begin{aligned}
C_t &= (1-\lambda)v_0 \exp\Bigg(m\ln(S_t) - m\ln(s_0) + \frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds + (1-m)\int_0^t r_s\, ds \\
&\quad - m\sum_{k=1}^n \sum_{0<s\le t} \ln(1 + a_k\Delta N_s^k)\Bigg) \times \prod_{k=1}^n \prod_{0<s\le t} (1 + m a_k \Delta N_s^k) \\
&= (1-\lambda)v_0 \frac{S_t^m}{s_0^m} \exp\left(\frac{m(1-m)}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds + (1-m)\int_0^t r_s\, ds\right) \prod_{k=1}^n \prod_{0<s\le t} \frac{1 + m a_k\Delta N_s^k}{(1 + a_k \Delta N_s^k)^m}.
\end{aligned}
$$

Wenn Sprünge existieren und $m \neq 1$, dann ist der Puffer C_t keine Potenz mehr des Aktienpreises S_t.

A Anhang: Lebesgue-Stieltjes-Integral

Bevor wir uns die Fortsetzung der Abbildung $H \mapsto I_X(H)$ aus (3.3) im Allgemeinen anschauen, betrachten wir zunächst den Fall, dass der Prozess X endliche Variation hat, d.h. $\mathrm{Var}(X)_T < \infty$, P-f.s.

Definition A.1. *Mit $\mathcal{V}$ (bzw. $\mathcal{V}^+$) bezeichnen wir die Menge der adaptierten Prozesse X mit càdlàg Pfaden und $Var(X)_T < \infty$ (bzw. $t \mapsto X_t(\omega)$ nichtfallend).*

Proposition A.2. *(i) Sei $X \in \mathcal{V}$. Dann existiert ein eindeutiges Paar $(A, B) \in \mathcal{V}^+ \times \mathcal{V}^+$ mit $X = X_0 + A - B$ und $\mathrm{Var}(X) = A + B$. Es gilt $A_0 = B_0 = 0$.*

(ii) Sei umgekehrt der Prozess X gegeben durch $X = X_0 + \widetilde{A} - \widetilde{B}$, wobei $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \mathcal{V}^+ \times \mathcal{V}^+$ mit $\widetilde{A}_0 = \widetilde{B}_0 = 0$. Dann gilt $\widetilde{A} + \widetilde{B} \geq \mathrm{Var}(X)$. Insbesondere ist X also ein Prozess von endlicher Variation.

Beweis. Ad (i): Setze $A := \frac{X - X_0 + \mathrm{Var(X)}}{2}$ und $B := \frac{\mathrm{Var(X)} - (\mathrm{X} - \mathrm{X_0})}{2}$, wobei der Prozess $t \mapsto \mathrm{Var(X)_t}$ nach Satz 2.31 càdlàg ist. Die Monotonie von A und B folgt aus der Abschätzung

$$|X_{t_2} - X_{t_1}| \leq \mathrm{Var(X)_{t_2}} - \mathrm{Var(X)_{t_1}}, \quad \forall \mathrm{t_1} \leq \mathrm{t_2}.$$

Die Eindeutigkeit ergibt sich sofort aus dem linearen Gleichungssystem, das (für festes t) das Paar (A_t, B_t) erfüllen muss.

Ad (ii): Sei nun $X = X_0 + \widetilde{A} - \widetilde{B}$, wobei $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \mathcal{V}^+ \times \mathcal{V}^+$ mit $\widetilde{A}_0 = \widetilde{B}_0 = 0$. Für jedes $t > 0$ folgt aus der Monotonie von $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$

$$\widetilde{A}_{\frac{k}{2^n}t} - \widetilde{A}_{\frac{k-1}{2^n}t} \geq \left(X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t} \right) \vee 0$$

und

$$\widetilde{B}_{\frac{k}{2^n}t} - \widetilde{B}_{\frac{k-1}{2^n}t} \geq \left(-X_{\frac{k}{2^n}t} + X_{\frac{k-1}{2^n}t} \right) \vee 0.$$

Addition ergibt

$$\widetilde{A}_{\frac{k}{2^n}t} - \widetilde{A}_{\frac{k-1}{2^n}t} + \widetilde{B}_{\frac{k}{2^n}t} - \widetilde{B}_{\frac{k-1}{2^n}t} \geq \left| X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t} \right|$$

und damit

$$\widetilde{A}_t + \widetilde{B}_t \geq \sum_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t}|.$$

Es folgt

$$\widetilde{A}_t + \widetilde{B}_t \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}t} - X_{\frac{k-1}{2^n}t}| = \mathrm{Var}(X)_t$$

□

Durch

$$\mu_A((s,t],\omega) := A_t(\omega) - A_s(\omega),\ s \leq t \quad \text{bzw.} \quad \mu_B((s,t],\omega) := B_t(\omega) - B_s(\omega) \quad (1.115)$$

lassen sich die Prozesse mit zufälligen Maßen identifizieren (zufällige Maße bedeutet, dass für festes ω $\mu_A(\cdot,\omega)$ und $\mu_B(\cdot,\omega)$ Maße auf der Borelschen σ-Algebra von $[0,T]$ sind). Die Identifikation (1.115) scheint für **rechtsstetige** Prozesse A und B Sinn zu ergeben: wegen $A_{s+} = A_s$ aber $A_{s-} \overset{\text{i.A.}}{\neq} A_s$ geht ein Sprung von A im Zeitpunkt s nicht in $A_t - A_s$ ein, ein Sprung von A im Zeitpunkt t, also $A_t - A_{t-}$, dagegen schon. **Mit der Identifikation (1.115) wird klar, wieso in (3.1) die Intervalle die Gestalt $]\!]T_{i-1}, T_i]\!]$ haben und nicht etwa $[\![T_{i-1}, T_i[\![$.**

In der Sprache der Maßtheorie bildet die Menge der endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $(s,t]$ mit $s \leq t$ einen *Ring*[§] und wegen der Rechtsstetigkeit der Pfade von A ist μ_A zunächst ein *Prämaß* auf diesem Ring[¶]. Für $t \downarrow s$ gilt nämlich $(s,t] \downarrow \emptyset$ und $A_t - A_s \to 0 = \mu_A(\emptyset,\cdot)$. Aus einem Fortsetzungssatz der Maßtheorie folgt, dass das Prämaß auf dem Ring zu einem Maß auf der erzeugenden σ-Algebra eindeutig fortgesetzt werden kann (siehe etwa Satz XI.2 und das anschließende Beispiel in Brokate und Kersting [1])[‖]. Da $(s,t] \downarrow \{t\}$ und $A_t - A_s \to \Delta A_t$ für $s \uparrow t$, muss für die Forsetzung $\mu_A(\{t\},\cdot) = \Delta A_t$ gelten.

Sei H beschränkt und die Pfade $t \mapsto H_t(\omega)$ Borel-messbar. Definiere *pfadweise* (d.h. für jedes ω getrennt) das Lebesgue-Stieltjes-Integral durch

$$\begin{aligned} \int_0^T H_s(\omega)dX_s(\omega) &:= \int_0^T H_s(\omega)dA_s(\omega) - \int_0^T H_s(\omega)dB_s(\omega) \\ &:= \int_0^T H_s(\omega)d\mu_A(ds,\omega) - \int_0^T H_s(\omega)\mu_B(ds,\omega). \qquad (1.116) \end{aligned}$$

Speziell für $H_s(\omega) = 1_{(s=t_0)}$ gilt

$$\int_0^T 1_{(s=t_0)}dX_s(\omega) = \mu_A(\{t_0\},\omega) - \mu_B(\{t_0\},\omega) = \Delta A_{t_0}(\omega) - \Delta B_{t_0}(\omega) = \Delta X_{t_0}(\omega).$$

$H_s(\omega)$ kann somit als Investment in den Sprung von X zum Zeitpunkt s interpretiert werden. Schränkt man sich auf elementare Integranden ein, d.h. $H \in \mathcal{S}$, dann stimmen

[§]Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen einer Menge $\widetilde{\Omega}$ heißt Ring, wenn folgende Eigenschaften gelten:
(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

[¶]Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ heißt Prämaß, wenn folgende Eigenschaften gelten:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) $A_n \in \mathcal{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n$ disjunkt, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} \implies \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

[‖]Alternativ kann man mit $\mu_X((s,t],\omega) := X_t(\omega) - X_s(\omega)$ ein zufälliges *signiertes* Maß definieren, das dann die Jordan-Zerlegung $\mu_X = \mu_A - \mu_B$ besitzt.

die Integrale in (3.3) mit denen in (1.116) überein. Wenn $s \mapsto H_s(\omega)$ stetig ist (oder z.B. nur linksstetig, was die Elementarintegranden aus (3.1) umfassen würde), dann existiert (1.116) auch als **Riemann-Stieltjes-Integral**, d.h. $\int_0^T H_s(\omega) dX_s(\omega)$ lässt sich punktweise durch elementare Integrale aus (3.1) approximieren.

Bemerkung A.3. Problem: *Das Pfadweises Integral aus (1.116), das gewisse Stetigkeitseigenschaften im Integranden besitzt, lässt sich nicht auf Integratoren mit unendlicher Variation (wie zum Beispiel Pfade der Brownschen Bewegung) ausdehnen (auch wenn das Integral etwa nur für alle stetigen Integranden erklärt werden soll).*

Sei $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sup_{t\in[0,1]} |x(t)| < \infty$ aber $Var(x)_1 = \infty$ (ersteres folgt z.B. aus Stetigkeit oder bereits aus càdlàg). x könnte z.B. ein Pfad der Brownschen Bewegung sein. Nun kann man eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementar-Integranden $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ finden, die zwar alle $\sup_{t\in[0,1]} |h_n(t)| \le 1$ erfüllen, aber die trotzdem bewirken, dass $I_x(h_n) \to \infty,\ n \to \infty$. Setzte dazu

$$h_n(t) = \sum_{i=1}^{2^n} \xi_{i-1,n} 1_{(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]}(t), \tag{1.117}$$

wobei

$$\xi_{i-1,n} = \begin{cases} 1 & : \quad \text{für } x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right) > 0\,, \\ -1 & : \quad \text{für } x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \le 0 \end{cases} .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} I_x(h_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \xi_{i-1,n} \left(x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \left| x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right| \to Var(x)_1 = \infty, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Aus (1.118) folgt mit dem Banach-Steinhaus-Theorem („Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit") die Existenz einer stetigen (und damit beschränkten) Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} h\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \left[x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right] = \infty, \tag{1.119}$$

d.h. statt einer Folge von Integranden gibt es sogar einen einzelnen Integranden, so dass bei Verfeinerung des Gitters das Elementar-Integral beliebig groß werden kann**.

**Zu fester Funktion x betrachtet man die Folge von Gittern $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\pi_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ und

Bemerkung A.5. *Um den Effekt des obigen Beispiels erzielen zu können, muss in den Wert von $\xi_{i-1,n}$, d.h. in $h(\frac{i-1}{2^n}+)$, bereits der Funktionswert von x zu dem* späteren *Zeitpunkt $\frac{i}{2^n}$ eingehen. Denkt man also an die Brownsche Bewegung und die Finanzmathematik, so wären die Strategien (1.117) nur mit prophetischen Gaben realisierbar und deshalb wohlmöglich gar nicht zulässig. Es besteht also noch Hoffnung, ein geeignetes Integral für alle ,,zulässigen" Strategien definieren zu können.*

B Anhang: vorhersehbare Prozesse

Wir wollen das Elementarintegral auf eine größere Menge von Integranden fortsetzen. Ein Integrand $H : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ soll folgendes erfüllen.

- Die Pfade $t \mapsto H_t(\omega)$ sollen Borel-messbar sein, also i.A. nicht mehr regulär (also nicht mehr linksstetig).
- Die t-Schnitte H_t sollen mit der Information ,,bis unmittelbar vor t" beobachtbar sein, also H_t ist $\mathcal{F}_{t-}$-messbar für alle $t \in [0,T]$, wobei

$$\mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right) \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{0-} := \mathcal{F}_0.$$

---

beliebige stetige Funktionen h mit $\sup_{t\in[0,1]} |h(t)| \leq 1$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ definiere den linearen Operator

$$T_n(h) := \sum_{i=1}^{2^n} h\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\left(x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right)$$

mit Norm

$$||T_n|| := \sup_{|h|\leq 1} |T_n(h)| < \infty. \tag{1.120}$$

Annahme für jedes stetige h mit $|h| \leq 1$ gölte, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(h)| < \infty \tag{1.121}$$

dann könnte man mit dem Banach-Steinhaus-Theorem schließen, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty.$$

Dies ist aber offenbar ein Widerspruch zu (1.118). Also gibt es ein $|h| \leq 1$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{i=1}^{2^n} h\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\left(x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right)\right| = \infty$$

und damit (1.119) (gehe ggf. zu $-h$ über).

Theorem A.4 (Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum. Sei $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von beschränkten linearen Operatoren von X nach Y. Wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\{T_\alpha x \mid \alpha \in I\}$ beschränkt ist, dann ist auch $\{||T_\alpha|| \mid \alpha \in I\}$ beschränkt.*

Diese beiden Bedingungen an H werden nun miteinander verheiratet, was zu der noch etwas stärkeren Bedingung der Vorhersehbarkeit führt:

Definition B.1. *Die vorhersehbare σ-Algebra $\mathcal{P}$ auf $\Omega \times [0,T]$ ist die kleinste σ-Algebra, s.d. folgende Mengen messbar sind*

(i) $A \times \{0\} \quad \forall A \in \mathcal{F}_0$

(ii) $A \times (s,t], \quad 0 \leq s < t \leq T, \ A \in \mathcal{F}_s$

Also formal

$$\begin{aligned} \mathcal{P} := \sigma(\mathcal{E}) &:= \bigcap_{\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \times [0,T] \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A} \\ &:= \{M \subset \Omega \times [0,T] \mid M \in \mathcal{A} \ \forall \sigma\text{-Algebren } \mathcal{A} \text{ auf } \Omega \times [0,T] \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{E} := \{A \times \{0\} \mid A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{A \times (s,t] \mid 0 \leq s < t \leq T, \ A \in \mathcal{F}_s\}. \tag{2.122}$$

Ein Prozess $H : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ heißt vorhersehbar, wenn er $\mathcal{P} - \mathcal{B}(\mathbb{R})-$messbar (d.h. kurz gesagt $\mathcal{P}-$messbar) ist.

Proposition B.2. *Wenn H vorhersehbar ist, dann ist für alle $t \in [0,T]$ der t-Schnitt H_t $\mathcal{F}_{t-}$-messbar und für alle $\omega \in \Omega$ ist der ω-Schnitt $t \mapsto H_t(\omega)$ (Pfad genannt) $\mathcal{B}([0,T])$-messbar.*

Zum Beweis benötigen wir folgende Proposition.

Proposition B.3. *[Erzeugung der Spur-σ-Algebra] Sei $\widetilde{\Omega}$ eine nichtleere Menge, $\mathcal{E}$ eine Menge von Teilmengen von $\widetilde{\Omega}$ und $B \subset \widetilde{\Omega}$. Dann gilt*

$$B \cap \sigma(\mathcal{E}) = \sigma_B(B \cap \mathcal{E}),$$

wobei $B \cap \sigma(\mathcal{E}) := \{C \subset \widetilde{\Omega} \mid \exists A \in \sigma(\mathcal{E}) \text{ mit } C = B \cap A\}$ und $B \cap \mathcal{E}$ entsprechend definiert ist. $\sigma(\mathcal{E})$ bezeichnet die kleinste σ-Algebra auf dem Grundraum $\widetilde{\Omega}$, die das Mengensystem $\mathcal{E}$ umfasst (also der Schnitt aller σ-Algebren auf $\widetilde{\Omega}$, die $\mathcal{E}$ umfassen). Entsprechend ist $\sigma_B(\ldots)$ die kleinste aller σ-Algebren auf dem kleineren Grundraum B.

Beweis. Ad $\supset$: Klar, da $B \cap \sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra auf B ist, die das Mengensystem $B \cap \mathcal{E}$ umfasst.

Ad $\subset$: Betrachte das Mengensystem $\mathcal{M} := \{A \subset \widetilde{\Omega} \mid A \cap B \in \sigma_B(B \cap \mathcal{E})\}$. Offenbar gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. Zudem macht man sich schnell klar, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf $\widetilde{\Omega}$ ist (da $\sigma_B(B \cap \mathcal{E})$ eine σ-Algebra auf B ist). Damit folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}$, was eine Umformulierung der zu zeigenden Aussage ist. $\square$

Beweis von Proposition B.2. Sei H vorhersehbar und $t \in (0, T]$. Dann ist die auf $\Omega \times \{t\}$ eingeschränkte Abbildung $H|_{\Omega \times \{t\}}$ messbar bzgl. der Spur-σ-Algebra

$$(\Omega \times \{t\}) \cap \mathcal{P} := \{(\Omega \times \{t\}) \cap B \mid B \in \mathcal{P}\}$$

(Klar, da $(H|_{\Omega \times \{t\}})^{-1}(A) = (\Omega \times \{t\}) \cap H^{-1}(A) \in (\Omega \times \{t\}) \cap \mathcal{P}$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Nach Proposition B.3 ist $(\Omega \times \{t\}) \cap \mathcal{P}$ tatsächlich eine σ-Algebra auf dem kleineren Grundraum $\Omega \times \{t\}$ und wird von den Mengen $(\Omega \times \{t\}) \cap (A \times (t_1, t_2])$ erzeugt, wobei $t_1 < t_2$ und $A \in \mathcal{F}_{t_1}$ (man beachte, dass $(\Omega \times \{t\}) \cap (A \times \{0\}) = \emptyset$, so dass diese Mengen zur Erzeugung nichts beitragen). Damit wird sie auch von allen Mengen der Form $A \times \{t\}$ mit $A \in \mathcal{F}_{t_1}$ und $t_1 < t$ erzeugt und folglich auch von $A \times \{t\}$ mit $A \in \mathcal{F}_{t-}$. Da zudem $\{A \times \{t\} \mid A \in \mathcal{F}_{t-}\}$ bereits eine σ-Algebra auf $\Omega \times \{t\}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}(\Omega \times \{t\}) \cap \mathcal{P} &\overset{\text{Proposition B.3}}{=} \sigma\left(\{A \times \{t\} \mid A \in \mathcal{F}_{t_1} \text{ für ein } t_1 < t\}\right) \\ &= \{A \times \{t\} \mid A \in \mathcal{F}_{t-}\}.\end{aligned}$$

Also muss H_t $\mathcal{F}_{t-}$-messbar sein (der Fall $t = 0$ geht analog, nur einfacher).

Die zweite Aussage folgt analog, indem man für festes ω die Spur-σ-Algebra

$$(\{\omega\} \times [0, T]) \cap \mathcal{P} = \sigma(\{\omega\} \times (t_1, t_2] \text{ für } t_1, t_2 \text{ mit } t_1 < t_2) = \{\omega\} \times \mathcal{B}([0, T])$$

betrachtet. □

Bemerkung B.4. *Aus der $\mathcal{F}_{t-}$-Messbarkeit von H_t für alle t folgt offenbar nicht die Vorhersehbarkeit von H. Man betrachte den Fall, dass $H_t(\omega) = f(t)$ für eine Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, die nicht Borel-messbar ist. Damit ist H nicht vorhersehbar, aber für festes t ist H_t eine konstante Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}$ und damit bzgl. jeder σ-Algebra auf Ω messbar.*

Bemerkung B.5. *Als Folge von Proposition B.2 ist jeder vorhersehbare Prozess adaptiert. Die Umkehrung ist jedoch selbst dann falsch, wenn die Pfade des Prozesses Borel-messbar sind. In Modellen mit Sprüngen im Aktienpreis X wäre es auch zu wenig, von einer Handelsstrategie H nur Adaptiertheit zu fordern, wie das folgende Beispiel zeigt.*

Betrachte einen **kompensierten Poisson-Prozess**

$$X_t = N_t - \lambda t, \quad N_t := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n > t\} - 1,$$

wobei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge von $\exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist.

X besitzt nur positive Sprünge, die aber nicht antizipierbar sind und denen eine lineare Abwärtsbewegung gegenübersteht. Der Aktienpreisprozess erscheint demnach arbitragefrei zu sein.

Definiere

$$\tau := \inf\{t \mid \Delta X_t = 1\}$$

und $H = 1_{[\![\tau]\!]}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^T H_s(\omega) dX_s(\omega) &= \underbrace{\mu_X(\{\tau(\omega)\}, \omega)}_{\textit{siehe (1.116)}} 1(\tau(\omega) \leq T) \\ &= \Delta X_{\tau(\omega)}(\omega) 1(\tau(\omega) \leq T) \quad = \begin{cases} 1 & \textit{für } Y_1(\omega) \leq T \\ 0 & \textit{für } Y_1(\omega) > T \end{cases}\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit beachte, dass $(t-1/n, t] \downarrow \{t\}$ für $n \uparrow \infty$, weswegen für das das Prämaß (1.115) fortsetzende Maß gelten muss

$$\mu_X(\{t\}, \omega) = \lim_{n\to\infty} \mu_X((t-1/n, t], \omega) = \lim_{n\to\infty} (X_t(\omega) - X_{t-1/n}(\omega)) = \Delta X_t(\omega).$$

H wäre demnach eine Arbitragemöglichkeit. Allerdings ist H zwar adaptiert bzgl. der natürlichen Filtration von X, da $\{H_t = 1\} = \{Y_1 = t\}$, aber nicht vorhersehbar.

Theorem B.6. *$\mathcal{P}$ ließe sich analog durch*

(1) alle linksstetigen adaptierten Prozesse oder

(2) durch alle Mengen $A \times \{0\}$, $A \in \mathcal{F}_0$ und $[\![0, \tau]\!]$, τ Stoppzeit

erzeugen. Also formal

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}') = \sigma(\mathcal{E}''),$$

für $\mathcal{E}$ aus (2.122) und

$$\mathcal{E}' := \{X^{-1}([a,b)) \mid a, b \in \mathbb{R},\ X \in \widetilde{\mathbb{L}}\}, \quad \mathcal{E}'' := \{A \times \{0\} \mid A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{[\![0,\tau]\!] \mid \tau \textit{ Stoppzeit}\},$$

wobei

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{L}} \ := \ & \{X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \mid X_t \textit{ ist } \mathcal{F}_t\textit{-messbar } \forall t \in [0,T] \\ & \textit{und } t \mapsto X_t(\omega) \textit{ ist linksstetig } \forall \omega \in \Omega\}. \end{aligned}$$

(Das Symbol $\mathbb{L}$ ist bereits für die linksstetigen Prozesse mit existierenden endlichen rechten Limiten belegt. In dem Theorem könnte man auch $\widetilde{\mathbb{L}}$ durch $\mathbb{L}$ ersetzen)

Kurzschreibweise

$$\sigma(\mathcal{E}') = \sigma\left(X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R} \mid X \in \widetilde{\mathbb{L}}\right).$$

Folge: Jeder linksstetige adaptierte Prozess ist vorhersehbar.

Für den Beweis beachte man folgende Proposition.

Proposition B.7. *Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset 2^{\widetilde{\Omega}}$. Es gilt die Implikation*

$$\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \implies \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Beweis. Sei $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. $\sigma(\mathcal{E}_2)$ ist also eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}_1$ umfasst. Damit muss nach Definition von $\sigma(\mathcal{E}_1)$ jede Menge aus $\sigma(\mathcal{E}_1)$ auch in $\sigma(\mathcal{E}_2)$ liegen. □

Anwendung: Um zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$, reicht es aus, jedes $A \in \mathcal{E}_1$ als abzählbaren Schnitt/Vereinigung oder Komplement von Elementen aus $\mathcal{E}_2$ darzustellen, also z.B. $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{E}_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit muss A in jeder σ-Algebra sein, die $\mathcal{E}_2$ umfasst, also $A \in \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Beweis von Theorem B.6. Schritt I: Sei $A \in \mathcal{F}_s$ und $s < t$. Definiere die Stoppzeit

$$\tau_A := \begin{cases} t, & \omega \in A \\ s, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Es gilt $A \times (s,t] = [\![0, \tau_A]\!] \setminus [\![0, s]\!]$. Die Menge $A \times (s,t]$ muss somit in **jeder** σ-Algebra liegen, die $\mathcal{E}''$ umfasst. Es folgt $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}'')$ und mit Proposition B.7 $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}'')$.

Schritt II: Sei τ eine Stoppzeit. Dann ist der Prozess $1_{[\![0,\tau]\!]}$ linksstetig und adaptiert. Adaptiertheit gilt wegen $\{\omega \in \Omega \mid 1_{[\![0,\tau]\!]}(\omega, t) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid t \leq \tau(\omega)\} = (\Omega \setminus \{\tau < t\}) \in \mathcal{F}_t$ (letzteres ist die einfache Richtung von Theorem 2.14). Zudem ist für $A \in \mathcal{F}_0$ der Prozess $1_{A \times \{0\}}$ linksstetig und adaptiert. Es folgt sogar $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}'$ und somit $\sigma(\mathcal{E}'') \subset \sigma(\mathcal{E}')$.

Schritt III: Bleibt zu zeigen $\mathcal{E}' \subset \sigma(\mathcal{E})(= \mathcal{P})$. Dafür ist zu zeigen, dass jeder Prozess aus $\widetilde{\mathbb{L}}$ $\mathcal{P}$-messbar ist. Sei $X \in \widetilde{\mathbb{L}}$. Definiere eine Folge von Prozessen $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X_t^{(n)} := X_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{n} X_{\frac{k-1}{n}T} 1_{(\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T]}(t).$$

Die Zufallsvariable $X_{\frac{k-1}{n}T}$ wird nun weiter durch die Elementarfunktionen

$$\sum_{l=-L^2}^{L^2} \frac{l-1}{L} 1_{\{\frac{l-1}{L} \leq X_{\frac{k-1}{n}T} < \frac{l}{L}\}}, \quad L \in \mathbb{N},$$

approximiert. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
(\omega, t) \quad \mapsto \quad & \frac{l-1}{L} 1_{\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid \frac{l-1}{L} \leq X_{\frac{k-1}{n}T}(\omega) < \frac{l}{L}\}}_{\in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{n}T}}} 1_{(\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T]}(t) \\
= \quad & \frac{l-1}{L} 1_{\underbrace{\{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T] \mid \frac{l-1}{L} \leq X_{\frac{k-1}{n}T}(\omega) < \frac{l}{L},\ \frac{k-1}{n}T < t \leq \frac{k}{n}T\}}_{\in \mathcal{P}}}
\end{aligned}$$

ist offenbar vorhersehbar. Da Summen und punktweise Limiten messbarer Abbildungen messbar sind und da

$$\sum_{l=-L^2}^{L^2} \frac{l-1}{L} 1_{\{\frac{l-1}{L} \leq X_{\frac{k-1}{n}T} < \frac{l}{L}\}} 1_{(\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T]} \to X_{\frac{k-1}{n}T} 1_{(\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T]}, \quad L \to \infty,$$

punktweise auf $\Omega \times [0,T]$, folgt die $\mathcal{P}$-Messbarkeit von $X^{(n)}$. Wegen der Linksstetigkeit von X konvergiert zudem $X^{(n)}$ punktweise (auf $\Omega \times [0,T]$) gegen X. Dazu betrachte man bei festem $t \in (0,T]$ zu jedem n das größte k, so dass $\frac{k-1}{n} < t$. Wegen der Linksstetigkeit der Pfade konvergieren die Funktionswerte $X_{\frac{k-1}{n}}(\omega)$ gegen $X_t(\omega)$. Damit folgt, dass X $\mathcal{P}$-messbar ist. $\square$

Bemerkung B.8. *Vorhersehbarkeit eines Prozesses H (bzgl. der Filtration $\mathbb{F}$) bedeutet, dass der Wert von H_t schon "kurz vor" t bekannt ist. Es kann also keine plötzlichen Überraschungen geben. Der Wert von H_t lässt sich durch Beobachtung der Umwelt im Intervall $[0, t)$ gewinnen, vgl. Proposition B.2. Daher erscheint es plausibel, dass linksstetige adaptierte Prozesse vorhersehbar sind.*

Bemerkung B.9. *Die Rechtsstetigkeit des Integrators ist eher als eine Konvention zu verstehen, d.h. X_t soll eben der Wert nach einem möglichen Sprung sein und man könnte eine analoge Theorie auch mit linksstetigen Prozessen entwickeln (wobei dann auch die Filtration links- statt rechtsstetig sein sollte, um überraschende Veränderungen $X_{t+} - X_t$ zu ermöglichen). Gegeben die Rechtsstetigkeit des Integrators hat jedoch die Linksstetigkeit (bzw. Vorhersehbarkeit) des Integranden eine tiefere Bedeutung (wie in Abschnitt A diskutiert).*

Zudem muss der Integrator ein recht regulärer Prozess sein (z.B. rechte und linke Limiten existieren und vieles mehr), der Integrand muss dagegen nur messbar bzgl. $\mathcal{P}$ sein – was ein sehr irregulären Pfadverhalten nicht ausschließt.

Beispiel B.10. *Ein Beispiel für einen vorhersehbaren Prozess ohne "regulärem Pfadverhalten" ist der Prozess*

$$H_t = 1_{\{B_t \geq 1\}},$$

wobei B eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Es gilt

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \; | H_t(\omega) = 1\} = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \; | B_t(\omega) \in [1, \infty)\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist Element der vorhersehbaren σ-Algebra $\mathcal{P}$, da $\mathcal{P}$ von den adaptierten linksstetigen Prozessen erzeugt wird (und die Brownsche Bewegung ein solcher ist). Offenbar ist der Pfad $t \mapsto H_t(\omega)$ an der Ersteintrittszeit

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid B_t(\omega) \geq 1\}$$

nicht linksstetig. Der Prozess springt nämlich von 0 auf 1. Trotzdem kann man stets den Wert von H_t durch Beobachtung der Brownschen Bewegung auf $[0, t)$ gewinnen. Der rechte Limes von $t \mapsto H_t(\omega)$ zum Zeitpunkt $\tau(\omega)$ existiert überhaupt nicht, da jeder Pfad der Brownsche Bewegung nach τ sowohl in $[1, \infty)$ als auch in $(-\infty, 1)$ auftaucht.

C Anhang: Konvergenzbegriffe in der Stochastik

Einschub: Wir werden kurz die wichtigsten Konvergenzbegriffe in der Stochastik skizzieren. Wir betrachten eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellwertigen Zufallsvariablen und eine reellwertige Zufallsvariable Z. Alle Zufallsvariablen sollen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert sein.

Definition C.1. *(1) $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen Z, wenn für alle $\varepsilon > 0$*

$$P(|Z_n - Z| \leq \varepsilon) \to 1, \quad n \to \infty.$$

(2) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert fast sicher gegen* Z*, wenn* $P(Z_n \to Z,\ n\to\infty) = 1$.

(3) Sei $p \in [1,\infty)$. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in* L^p *gegen* Z*, wenn*

$$E(|Z_n - Z|^p) \to 0, \quad n \to \infty$$

(2) ist äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$P(|Z_m - Z| \leq \varepsilon\ \forall m \geq n) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Damit sieht man, dass (**2**) $\implies$ (**1**). Die Implikation (**3**) $\implies$ (**1**) folgt aus der Abschätzung

$$E(|Z_n - Z|^p) \geq \varepsilon^p P(|Z_n - Z| > \varepsilon)$$

Andere Implikationen gelten nicht. Klassische Gegenbeispiele:

(2) $\not\Rightarrow$ (3). Wähle $\Omega = (0,1)$ und P das Lebesgue-Maß (Gleichverteilung auf $(0,1)$). Setze. $Z = 0$ und $Z_n(\omega) = n^{1/p}1_{(0,1/n)}(\omega)$. Für jedes $\omega \in (0,1)$ gilt $Z_n(\omega) \to Z(\omega)$, $n \to \infty$, also (2). Es gilt aber

$$E(|Z_n - Z|^p) = (n^{1/p})^p P((0,1/n)) = n\frac{1}{n} = 1$$

und damit liegt keine L^p-Konvergenz vor.

(3) $\not\Rightarrow$ (2) Stelle $n \in \mathbb{N}$ durch $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, \dots, 2^m - 1$ dar und definiere

$$Z_n(\omega) = 1_{(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]}(\omega) \quad \text{sowie wieder} \quad Z = 0. \tag{3.123}$$

Es gilt

$$E(|Z_n - Z|^p) = P(Z_n = 1) = \frac{1}{2^m}$$

Da mit $n \to \infty$ auch $m \to \infty$ folgt L^p-Konvergenz. Für jedes $\omega \in (0,1)$ gibt es aber unendlich viele n mit $Z_n(\omega) = 1$. Damit gibt es keine punktweise Konvergenz ((2) ist nicht erfüllt).

Definition C.2 (Gleichgradige Integrierbarkeit)**.** *Eine Folge* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von reellwertigen Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar, wenn*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|Z_n| 1_{\{|Z_n|>M\}}\right) \to 0, \quad M \to \infty.$$

Lemma C.3 (Erstes Borel-Cantelli-Lemma)**.** *Sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. *Dann gilt* $P($*„*A_n *tritt für unendlich viele* n *ein"*$) = P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\right) = 0$.

Es gilt $A := \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\right) \in \mathcal{F}$ und

$$\omega \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n \Leftrightarrow \forall m\ \exists n \geq m\ \omega \in A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

A_n tritt genau dann unendlich oft ein, wenn es nach jedem m nochmal eintritt.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $A \subset \bigcup_{n\geq m} A_n$ und damit

$$P(A) \leq P(\bigcup_{n\geq m} A_n) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) \to 0 \quad \text{für } m \to \infty,$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. Folglich kann die rechte Seite durch Wahl eines großen m beliebig klein gemacht werden. Da die linke Seite nicht von m abhängt, muss sie 0 sein. $\square$

Wichtig für Anwendungen sind die folgenden beiden Sätze.

Theorem C.4. *(1) impliziert fast sichere Konvergenz einer* Teilfolge $(Z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* Z.

Beweis. Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die stochastisch gegen Z konvergiert. Offenbar lässt sich dann eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit

$$P(|Z_{n_k} - Z| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Definiere

$$A := \{|Z_{n_k} - Z| \leq 2^{-k} \text{ für alle } k \text{ außer höchstens endlich vielen}\}.$$

Aus dem Erstes Borel-Cantelli-Lemma folgt, dass $P(A^c) = 0$ und damit $P(A) = 1$. Zudem gilt $A \subset \{Z_{n_k} \to Z, \quad k \to \infty\}$ und damit die Behauptung. $\square$

Theorem C.5. *(1) und gleichgradige Integrierbarkeit der Folge* $(|Z_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *implizieren (3).*

Beweis. Unter (1) und der gleichgradigen Integrierbarkeit der Folge $(|Z_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ folgere man mit Hilfe einer *Teilfolge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, auf der fast sichere Konvergenz gilt, die Integrierbarkeit von $|Z|^p$. Es gilt nämlich

$$E\left(|Z|^p\right) = E\left(\liminf_{k\to\infty} |Z_{n_k}|^p\right) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} E\left(|Z_{n_k}|^p\right) < \infty. \tag{3.124}$$

Wegen (3.124) und der Abschätzung

$$E\left(|Z_n - Z|^p\right) \leq E\left((|Z_n| + |Z|)^p\right) \leq 2^p E\left(|Z_n|^p\right) + 2^p E\left(|Z|^p\right)$$

zieht die gleichgradige Integrierbarkeit von $(|Z_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleichgradige Integrierbarkeit von $(|Z_n - Z|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ nach sich. Dann schätze man ab

$$\begin{aligned} E(|Z_n - Z|^p) &= E\left(1_{\{|Z_n-Z|^p>M\}}|Z_n - Z|^p\right) + E\left(1_{\{|Z_n-Z|^p\leq M\}}|Z_n - Z|^p\right) \\ &\leq E\left(1_{\{|Z_n-Z|^p>M\}}|Z_n - Z|^p\right) + MP(|Z_n - Z| > \varepsilon) + \varepsilon^p, \quad \forall\varepsilon > 0, M > 0. \end{aligned}$$

Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(|Z_n - Z|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man zu festem $\delta > 0$ ein $M \in \mathbb{R}_+$ finden, so dass

$$E\left(1_{\{|Z_n-Z|^p>M\}}|Z_n - Z|^p\right) \leq \frac{\delta}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ und n_δ folgt $E(|Z_n - Z|^p) \leq \delta$ für alle $n \geq n_\delta$ und damit die Behauptung. □

Wenn $E(|Z_n|^p) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $E(|Z|^p) < \infty$, dann gilt auch die Umkehrrichtung "(3) $\implies$ (1) & gleichgradig Integrierbar". Die Zusatzforderung der gleichgradigen Integrierbarkeit ist also i.W. auch notwendig um L^p-Konvergenz zu erhalten.

D Anhang: Ergänzende Überlegungen

Im folgenden finden sind einige Überlegungen, die **mittlerweile nicht mehr Bestandteil der Vorlesung sind** und zur Verbesserung der Übersicht ausgelagert wurden.

Alternative zur Einbettung aus Bemerkung 3.3.

Bemerkung D.1. *Zeitdiskrete Modelle lassen sich als Spezialfall zeitstetiger Modelle interpretieren. Zu einem zeitdiskreten Wertpapierpreisprozess* $\widetilde{S}$ *mit*

$$\widetilde{S} : \Omega \times \{0, 1, \ldots, T\} \to \mathbb{R},$$

einer zeitdiskreten Handelsstrategie $\widetilde{H}$ *mit*

$$\widetilde{H} : \Omega \times \{0, 1, \ldots, T\} \to \mathbb{R}$$

und einer zeitdiskreten Filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ *definiere folgende càdlàg Prozesse und folgende rechtsstetige Filtration*

$$S_t := \widetilde{S}_{[t]}, \tag{4.125}$$

$$H_t := \widetilde{H}_{[t]} \quad \textit{und} \quad \mathcal{F}_t := \widetilde{\mathcal{F}}_{[t]}, \tag{4.126}$$

wobei $[t] := \max\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \leq t\}$. *Die Einbettung (4.125)/(4.126) erlaubt es, zeitdiskrete Finanzmarktmodelle als Spezialfälle von zeitstetigen Finanzmarktmodellen zu betrachten. Diese sehr wünschenswerte Eigenschaft ginge verloren, wenn man bei den zeitstetigen Prozessen keine Sprünge zulassen würde. Für* $t \in \mathbb{N}$ *gilt* $S_{t-} = S_{t-1}$.

Proposition D.2. H *ist genau dann* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-vorhersehbar im Sinne von Definition B.1, wenn* $\widetilde{H}_t$ $\widetilde{\mathcal{F}}_{t-1}$*-messbar für alle* $t = 1, \ldots, T$ *und* $\widetilde{H}_0$ $\widetilde{\mathcal{F}}_0$*-messbar.*

Beweis. $\Leftarrow$: Sei der zeitdiskrete Prozess im zeitdiskreten Sinne vorhersehbar. Wir werden zeigen, dass die zeitstetigen Prozesse $(\omega, t) \mapsto H_n(\omega)1_{[n,n+1)}(t)$, $n = 0, 1, \ldots, T-1$ und $(\omega, t) \mapsto H_T(\omega)1_{\{T\}}(t)$ vorhersehbar im Sinne von Definition B.1 sind. Im Fall $n = 0$ folgt dies aus $(A \times \{0\}) \in \mathcal{P}$ und $(A \times (0, 1)) \in \mathcal{P}$ für alle $A \in \mathcal{F}_0$. Sei $n \in \{1, \ldots, T-1\}$. Es gilt

$$H_n 1_{(n-1/m, n+1-1/m]} \to H_n 1_{[n,n+1)} \quad \text{punktweise auf } \Omega \times [0, T] \text{ für } m \to \infty. \tag{4.127}$$

Wegen $n - 1/m \geq n - 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und da H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, ist die linke Seite von (4.127) für alle $m \in \mathbb{N}$ vorhersehbar und damit auch ihr punktweiser Limes. Der Fall $n = T$ geht analog mit der Approximation durch $H_T 1_{(T-1/m,T]}$. Da die Summe messbarer Funktionen messbar ist, folgt die Vorhersehbarkeit von $H = \sum_{n=0}^{T-1} H_n 1_{[n,n+1)} + H_T 1_{\{T\}}$.

$\Rightarrow$: Wenn H vorhersehbar ist, dann ist mit Proposition B.2 für alle $n = 1, \ldots, T$ H_n (und damit auch $\widetilde{H}_n$) $\mathcal{F}_{n-}$-messbar. Da im Modell (4.126) $\mathcal{F}_{n-} = \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}$ gilt, folgt die Behauptung für $n = 1, \ldots, T$.

Die $\widetilde{\mathcal{F}}_0$-Messbarkeit von H_0 folgt analog durch Betrachtung der Spur-σ-Algebra $[\![0]\!] \cap \mathcal{P} = \{0\} \times \mathcal{F}_0$.

$\square$

Wir stellen noch einen Zusammenhang zu anderen σ-Algebren auf dem Produktraum $\Omega \times [0, T]$ her (wieder im allgemeinen Modell), denen man in der Literatur des öfteren begegnet, die aber **in dieser Vorlesung keine größere Rolle spielen werden**.

Definition D.3. *(1) Die σ-Algebra der optionalen (oder gut-messbaren) Mengen auf $\Omega \times [0, T]$ wird definiert durch*

$$\mathcal{O} := \sigma\left(X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R} \mid X \textit{ ist adaptiert und càdlàg}\right).$$

Ein Prozess X heißt optional (oder gut-messbar), wenn er $\mathcal{O}$-messbar ist.

(2) Ein Prozess X heißt progressiv-messbar, wenn für alle $t \in [0, T]$ die eingeschränkte Abbildung $X|_{\Omega \times [0,t]}$ bzgl. der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]}$ (auf dem Produktraum $\Omega \times [0, t]$) messbar ist.

Es gelten die folgenden Implikationen

$$X \text{ vorhersehbar } \Rightarrow X \text{ optional } \Rightarrow X \text{ progressiv messbar } \Rightarrow X \text{ adaptiert} .$$

Ein Beispiel für einen progressiv messbaren Prozess, der nicht optional ist, findet sich in Dellacherie “Capacité et processus stochastiques”, Springer-Verlag, Berlin, 1972, auf Seite 128.

Bemerkung D.4. *Die optionale σ-Algebra $\mathcal{O}$ umfasst die σ-Algebra $\mathcal{O}'$, die durch die Mengen $A \times [s, t)$, $0 \leq s < t \leq T$, $A \in \mathcal{F}_s$ erzeugt wird (oder äquivalent durch die Mengen $A \times [s, t]$). Vgl. dies mit Definition B.1 von $\mathcal{P}$. Man mache sich z.B. anhand des zeitdiskreten Modells aus Bemerkung D.1 klar, dass bereits $\mathcal{O}'$ i.A. strikt größer ist als $\mathcal{P}$.*

Es kann also einen großen Unterschied machen, ob $A \times (s,t]$ oder $A \times [s,t]$. Jede Menge $A \times (s,t]$, wobei $A \in \mathcal{F}_s$, kann geschrieben werden als

$$A \times (s,t] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times [s+1/n, t]) .$$

Wegen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s+1/n}$ gilt $A \times [s+1/n, t] \in \mathcal{O}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und damit $A \times (s,t] \in \mathcal{O}$ also $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$. Bei einem Beweisversuch der Umkehrrichtung bekäme man aber Probleme, da $A \times [s,t]$, $A \in \mathcal{F}_s$ wohl nur durch $A \times (s - \frac{1}{n}, t]$ zu approximieren ist. Problem dabei: A i.A. nicht $\mathcal{F}_{s-1/n}$-messbar. Vielmehr gilt folgende Proposition

Proposition D.5. *H aus (4.126) ist genau dann $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$-optional im Sinne von Definition D.3, wenn $\widetilde{H}_t$ $\widetilde{\mathcal{F}}_t$-messbar ist für alle $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition D.2. □

Der Spitzklammer-Prozess

Neben der quadratischen Variation $[X,X]$ aus Definition 3.40 koexistiert die sog. "vorhersehbare quadratische Variation $< X, X >$, die auch "Spitzklammer-Prozess" genannt wird. $< X, X >$ lässt sich für alle lokal quadratintegrierbaren Martingale X definieren. Dazu muss man etwas ausholen.

Definition D.6. *Ein Prozess $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ist von Klasse (D), wenn die Familie von Zufallsvariablen (X_τ), wobei τ die Menge der $[0,T]$-wertigen Stoppzeiten durchläuft, gleichgradig integrierbar ist*[††]

Theorem D.7 (Doob-Meyer-Zerlegung)**.** *Sei X ein Submartingal von Klasse (D). Dann existiert eine (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutige Zerlegung von X in ein Martingal M (mit $M_0 = 0$) und einen vorhersehbaren, monoton steigenden Prozess A (mit $A_0 = 0$), d.h.*

$$X = X_0 + M + A. \tag{4.128}$$

Bemerkung D.8. *Im Gegensatz zu der Zerlegung (3.11) muss der Prozess A in (4.128) vorhersehrbar sein. Dies macht die Zerlegung eindeutig. Die Zerlegung in (3.11) ist dagegen i.A. nicht eindeutig. Nehme dazu einen Poisson-Prozess N mit Rate $\lambda > 0$, d.h.*

$$N_t := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

wobei $T_0 = 0$ und $(T_n - T_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge von exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ ist, d.h. $P(T_1 > t) = \exp(-\lambda t)$. Der Prozess N ist ein Semimartingal bzgl. seiner kanonischen Filtration. Es gibt viele Möglichkeiten, ihn zu zerlegen, z.B.

$$N_t = \underbrace{N_t - \lambda t}_{M_t} + \underbrace{\lambda t}_{A_t} \tag{4.129}$$

[††]Gleichgradig integrierbar bedeutet, dass $\sup_\tau E\left(|X_\tau| 1_{\{|X_\tau| > n\}}\right) \to 0,\ n \to \infty$.

oder

$$N_t = \underbrace{0}_{\widetilde{M}_t} + \underbrace{N_t}_{\widetilde{A}_t}.$$

(4.129) ist aber die einzige Zerlegung, in der A vorhersehrbar ist (und damit im gewissen Sinne die kanonische Zerlegung)‡‡*.* λt *kann als Drift des Poisson-Prozesses interpretiert werden, während* $N_t - \lambda t$ *die zufälligen Schwankungen von* N_t *sind.*

Wenn nun der Prozess X ein lokal quadratintegrierbares Martingal ist, d.h. X^{T_n} sind Martingale für eine lokalisierende Folge $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$, dann sind die Prozesse $(X^2)^{T_n}$ Submartingale (Jensensche Ungleichung) und offenbar von Klasse (D). D.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Doob-Meyer-Zerlegung

$$(X^2)^{T_n} = M^n + A^n,$$

wobei M^n Martingale und A^n monoton steigende vorhersehbare Prozesse sind. Definiere

$$< X, X >_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n, \quad t \in [0, T]. \tag{4.130}$$

Der Limes existiert für alle $t \in [0, T]$ P-f.s., da $P(T_n \geq T) \to 1$ für $n \to \infty$ und $\left(A^{n+1}\right)^{T_n} = A^{n*}$. Der càdlàg Prozess $< X, X >$ ist durch die Eigenschaft charakterisiert, dass $< X, X >_0 = 0$, $< X, X >$ vorhersehbar und der Prozess $X^2 - < X, X >$ ein lokales Martingal ist.

Wenn X ein lokal quadratintegrierbares Martingal mit *stetigen Pfaden* ist, dann stimmen die beiden quadratischen Variationsprozesse überein, d.h. $< X, X > = [X, X]$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung und der Tatsache, dass in diesem Fall der Prozess $[X, X]$ wegen $\Delta[X, X] = (\Delta X)^2 = 0$ stetig ist (und damit vorhersehbar) und der Prozess $X^2 - [X, X] = 2X_- \bullet X$ ein lokales Martingal ist (Eigenschaft (e) des Integrals).

Literatur

[1] Brokate, M. und Kersting, G. (2011) Maß und Integral, Birkhäuser.

[2] Karatzas, I. und Shreve, E.S. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, 2. Auflage.

‡‡I.A. muss aber für ein Semimartingal keine Zerlegung (3.11) mit *vorhersehrbarem A* existieren (kann zum Beispiel passieren, wenn das Semimartingal nicht-integrierbare Sprünge besitzt, vgl. dazu den diskreten Fall im Skript „Stochastische Finanzmathematik", Satz 1.4).

*Letzteres folgt aus der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung und der Tatsache, dass abgestoppte Martingale wieder Martingale und abgestoppte vorhersehbare Prozesse wieder vorhersehbare Prozesse sind. Zudem kann man mit der Eindeutigkeit der Doob-Meyer Zerlegung zeigen, dass (4.130) nicht von der Wahl der lokalisierenden Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. $< X, X >$ ist als punktweiser Limes (auf dem Produktraum $\Omega \times [0, T]$ betrachtet) von vorhersehbaren Prozessen (messbar bzgl. der vorhersehbaren σ-Algebra) vorhersehbar.

[3] Mörters, P. und Peres, Y. (2010) Brownian Motion. Cambridge University Press.

[4] Protter, P. (2004) Stochastic Integration and Differential Equations. Springer-Verlag, 2. Auflage.